RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.

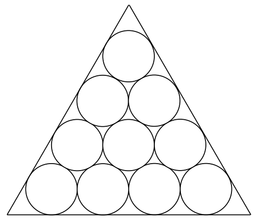
Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

76-1 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Dans une urne contenant N boules, n d'entre elles sont blanches. On extrait p boules de cette urne et, sans les regarder, on les dépose dans une seconde urne. On tire maintenant une boule de la seconde urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?



76-2 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

On considère des disques de même diamètre entassés en n rangées à l'intérieur d'un triangle équilatéral (dans la figure ci-contre, $n = 4$). Soit A l'aire du triangle et A_n l'aire totale des disques.

Quelle est la limite de A_n/A quand n tend vers l'infini ?

Que se passe-t-il si le triangle est remplacé par un carré (les disques étant entassés en n rangées de n disques) ?

76-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Soit un point A extérieur à une droite d. On dispose d'une règle non graduée et d'un compas. Avec ces instruments, on veut tracer la perpendiculaire à la droite d passant par A.

a) En utilisant le compas trois fois.
b) En utilisant le compas deux fois.
c) En utilisant le compas une seule fois.

Des solutions

72-1 *de Jacques Chayé* :

Un cercle de rayon 1 est centré sur l'axe de la parabole ayant pour équation $y = x^2$ par rapport à un repère orthonormé. Préciser l'ordonnée h du centre I de ce cercle ($h > 1$) s'il est tangent à la parabole en deux points M et M'.

Solution de l'auteur :

1ère méthode :

Le cercle de centre I et de rayon 1 admet pour équation : $x^2 + (y - h)^2 = 1$. Le demi-cercle supérieur n'est pas concerné ici car les coefficients directeurs des tangentes à la parabole sont de même signe que ceux des tangentes au demi-cercle inférieur (coefficients positifs dans le premier quadrant, négatifs dans le deuxième). L'équation de ce demi-cercle peut s'écrire : $y = h - \sqrt{1 - x^2}$. Posons $f(x) = x^2$ et $g(x) = h - \sqrt{1 - x^2}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$; g est dérivable sur $]-1 ; 1[$ et $g'(x) = x / \sqrt{1 - x^2}$. On a $f'(x) = g'(x)$ si et seulement si $2 = 1 / \sqrt{1 - x^2}$ (le cas où $x = 0$ est exclu puisque $h > 1$) cette équation équivaut à $1 - x^2 = 1/4$ c'est-à-dire à : $x = \sqrt{3} / 2$ ou $x = -\sqrt{3} / 2$; or, $f\left(\sqrt{3} / 2\right) = f\left(-\sqrt{3} / 2\right) = 3 / 4$ et $g\left(\sqrt{3} / 2\right) = g\left(-\sqrt{3} / 2\right) = h - 1 / 2$. Le cercle répondra à la question si et seulement si $3/4 = h - 1/2$, c'est-à-dire $h = 5/4$.

2ème méthode :

Soit M (u ; u^2) un point de la parabole. La normale en M à la parabole admet l'équation : $y - u^2 = -(x - u)/2u$ qui peut s'écrire : $y = -x/2u + u^2 + 1/2$. L'ordonnée du point d'intersection P de cette normale avec Oy est égale à $u^2 + 1/2$.

Donc $PM^2 = u^2 + 1/4$. Or $u^2 + 1/4 = 1$ équivaut à $u = \sqrt{3} / 2$ ou $u = -\sqrt{3} / 2$.

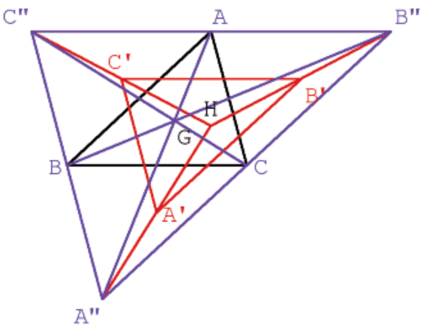
Conclusion : le point P est centre d'un cercle solution à condition que son ordonnée soit égale à : $\left(\sqrt{3} / 2\right)^2 + 1 / 2 = 5 / 4$.

73-2 *de Louis Rivoallan* :

ABC est un triangle non rectangle d'orthocentre H ; A', B', et C' sont les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles BCH, ACH et ABH. Montrer que ABC et A'B'C' ont même aire.

Solution de l'auteur :

Soit un triangle ABC non rectangle. On note H son orthocentre et G son centre de gravité. Soit A', B' et C' les centres des cercles circonscrits aux triangles HBC, HCA et HAB. De ce fait les droites (A'B'), (B'C') et (C'A') sont les médiatrices respectives de [HC], [HA] et [HB]. Soit h l'homothétie de centre H et de rapport 2. On note A'', B'' et C'' les images respectives par h de A', B' et C'. La droite (A''B'') est donc parallèle à la droite (A'B') et donc perpendiculaire à [HC]. Par suite elle est également parallèle à (AB). Le milieu de [HC] a pour image C. Par suite (A''B'') est la parallèle à (AB) passant par C. De même



(B''C'') est la parallèle à (BC) passant par A et (C''A'') la parallèle à (CA) passant par B. De ce fait les quadrilatères A''BAC, B''CBA et C''ACB ayant leurs côtés opposés parallèles deux à deux sont des parallélogrammes. Des égalités vectorielles montrent alors que A est le milieu de [B''C''], B le milieu de [C''A''] et C celui de [A''B'']. Le point H apparaît alors comme étant le point d'intersection des médiatrices de A''B''C'' et, puisqu'il est invariant par *h*, c'est aussi le centre du cercle circonscrit à A'B'C'. Soit M le milieu de [BC]. Le point G étant le centre de gravité de ABC, on a $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$. Le quadrilatère ABA''C étant un parallélogramme de centre M, on a $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MA''}$. On en déduit que $\overrightarrow{GA''} = -2\overrightarrow{GA}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA''}$. Si on appelle *g* l'homothétie de centre G et de rapport –1/2, A est l'image de A'' par *g* et de même B et C sont les images respectives de B'' et C'' par *g*. Cela montre que par $g \circ h$, A'B'C' a pour image ABC. Or la composée de deux homothétie de rapport 2 et –1/2 est une symétrie centrale. Par suite A'B'C' et ABC sont isométriques et ils ont donc la même aire.
Remarque : cette symétrie centrale a pour centre le milieu de [OH], O étant le centre du cercle circonscrit à ABC. Ce point est le centre du cercle des 9 points du triangle ABC et ce cercle est aussi le cercle des 9 points du triangle A'B'C'.

73-3 et 75-3 *de Jean Cordier* :
Sur un triangle quelconque ABC on place les points I sur (BC), J sur (AC) et K sur (AB) de telle sorte que IJK forme un triangle équilatéral dont les sommets se lisent dans le même sens que ceux du triangle initial.
1) Quel est l'ensemble des centres de gravité des triangles IJK ?
2) Soit *f* la fonction donnant l'aire du triangle IJK. Cette fonction admet-elle une valeur minimale ? Peut-on alors construire le triangle correspondant à la règle et au compas ?

Solution de Louis Rivoallan :
Soit un triangle direct. Montrons tout d'abord qu'il est toujours possible de construire un triangle équilatéral direct tel que $I \in (AC)$, $J \in (AB)$ et $K \in (BC)$. Il faut distinguer deux cas :

ABC est équilatéral. Soit O son centre. Pour tout point I de (AC) on considère la similitude de centre O qui transforme A en I. Cette similitude transforme B en J et C en K et il est élémentaire de voir que le triangle IJK répond au problème posé. Par ailleurs, le centre de IJK est O. Lorsque I décrit la droite (AC), l'ensemble des centres des triangles IJK est donc réduit au point O. L'aire minimale du triangle IJK est obtenue lorsque OI est minimale c'est-à-dire lorsque I est le projeté orthogonal de O sur [AC]. Puisque ABC est équilatéral, I est alors le milieu de [AC].

ABC n'est pas équilatéral. L'un des trois angles de ce triangle n'est donc pas égal à $\pi / 3$. Supposons que cela soit l'angle $\widehat{ABC}$. Soit I un point quelconque de (AC). Dans la rotation de centre I et d'angle $\pi / 3$, la droite (AB) a pour image une droite (A'B') qui est sécante à (BC) puisque $\widehat{ABC} \neq \pi / 3$. Soit K le point d'intersection de (A'B') avec (BC) et soit J son antécédent. Par construction, IJK est un triangle équilatéral qui répond aux conditions posées. Si on note O le centre de IJK, quel est l'ensemble que décrit O lorsque I décrit (AC) ? Considérons un repère orthonormé direct. On a A(a ; a') ; B(-1 ; 0) et C(0 ; 0). Il existe des réels t et k tels que $\overrightarrow{CI} = t\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BJ} = k\overrightarrow{BA}$. Par suite des coordonnées de I sont (ta ; ta') et celles de J sont ($-1 + k(a + 1)$; ka'). On calcule alors les coordonnées du point K, image de J par la rotation de centre I et d'angle $\pi / 3$ (par exemple en utilisant les nombres complexes). Puisque K appartient à (BC) son ordonnée est 0. Cela permet d'obtenir une relation $k = f(t)$, où f est une fonction affine. Dès lors, les coordonnées de I, J et K sont donc des expressions où n'apparaissent que des fonctions affines de la variable t ; il en sera de même pour leur isobarycentre, ce qui permet d'affirmer que celui-ci décrira une droite lorsque I décrit (AC). L'aire de IJK est proportionnelle à OI^2. Or les coordonnées de $\overrightarrow{OI}$ sont des fonctions affines de t. Par suite OI^2 est une expression de type trinôme du second degré, strictement positif, qui admet un minimum absolu. La valeur de t_0 qui réalise ce minimum est celle qui annule la dérivée de cette fonction trinôme. Le nombre t_0 s'exprime uniquement à l'aide de sommes, de produits et de quotients faisant intervenir les nombres a et a' et des constantes. Par conséquent ce nombre t_0 est constructible à la règle et au compas, et le point I pourra l'être également, ainsi que les points J et K correspondant. Mais cela ne va pas être très drôle à faire !

Solution de l'auteur :
Soit un triangle ABC quelconque et les droites qui prolongent les côtés.
Quel est l'ensemble des centres de gravité des triangles équilatéraux directs (IJK) tels que I appartient à (BC), J à (AC), K à (AB) ? On note « Tr-éq » la propriété « être une solution du problème ». L'idée de base est la suivante : soit deux triangles « Tr-éq », il existe une similitude directe qui transforme l'un en l'autre et le centre de cette similitude est indépendant des deux triangles choisis.

Partie 1 : A, B, C étant donnés, on peut construire un point O se projetant orthogonalement en E_1, F_1, G_1 sur les côtés de ABC et le triangle $E_1F_1G_1$ est équilatéral direct. Pour le démontrer, on va construire une figure homothétique de la figure ci-contre. On ne discutera pas la construction qui apparaît en pointillé sur la figure :

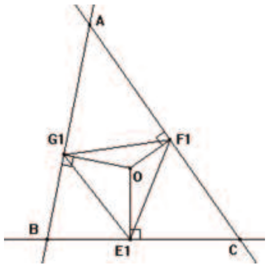


Figure 1

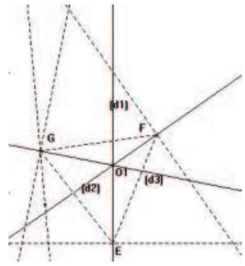
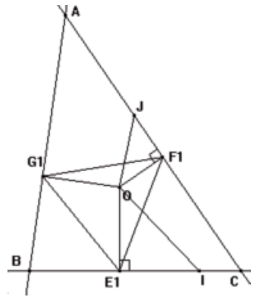


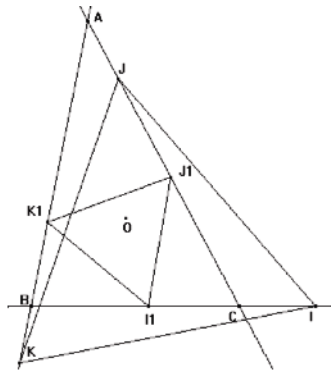
Figure 2

On construit un point O_1 quelconque et (d_1), (d_2), (d_3) respectivement orthogonales à (BC), (AC), (AB). Soit E un point de (d_1) (Noter que E pourrait être situé « au-dessus » de O_1 sur la figure). L'image de (d_2) par la rotation R de centre E d'angle 60° est une droite qui coupe (d_3) en un point G. Soit F l'antécédent de G par R. Le triangle équilatéral (EFG) est direct. On trace en E, F et G une parallèle respectivement à (BC), (AC), (AB) et ces trois droites se coupent en des points définissant un triangle homothétique de (ABC). Cette homothétie permet la construction de E_1,F_1,G_1 de la figure 1.

Partie 2 : Une même similitude de centre O d'angle t variable permet d'écrire des équations paramétriques des droites (d) = (BC), (d') = (AC) et (d'') = (AB). D'abord pour (d) = (BC) : soit un point I sur (d), il existe une et une seule similitude directe notée St de centre O d'angle t, de rapport r telle que : I = St(E_1) et il y a bijection entre les points I de (d) et les couples (t, r). Une équation de la droite (d) avec t pour paramètre est donc I = St(E_1) avec t dans] –π, π [(Équation 1). (Note : r dépend de t) Passons à la droite (d') = (AC) : soit la similitude S's directe d'angle s de centre O telle que S's(E_1) = F_1. Alors, l'image de (d) par S's est (d'), donc le point J défini par J = S's(I) = S's(St(E_1)) parcourt (d'). Or S's et St commutent car elles ont même centre, donc on a : J = St(S's(E_1)), et on obtient une équation paramétrique de (d'') : J = St(F_1) (t varie) (Équation 2). C'est bien St qui est dans cette seconde équation paramétrique. De même pour (d'').



Partie 3 : **Étude du lieu demandé** : figure ci-contre. Les équations ci-dessus permettent d'engendrer tous les triangles solutions. D'une part St transforme ($E_1F_1G_1$) en un triangle semblable (IJK) direct, donc en une solution, d'autre part on les aura toutes, car tout point I de (d) sera concerné, et il existe un seul triangle « Tr-éq » ayant un sommet en I comme le montre la méthode de construction donnée dans le lemme 1, mais appliquée cette fois aux trois droites non concourantes du triangle (ABC). Le lieu des centres de gravité des triangles « Tr-éq » peut s'obtenir en établissant une équation paramétrique de ce lieu. Soit w_1 le centre de gravité du triangle ($E_1F_1G_1$), son image par St est le centre de gravité w du triangle (IJK). Donc w = St(w_1) (t variant) est une équation du lieu cherché, c'est une droite passant par w. On la tracera sur la figure.



Recherche d'un triangle « Tr-éq » d'aire minimale (existence et unicité)

$E_1F_1G_1$ est l'unique triangle d'aire minimale car le rapport de similitude de St est OJ/OJ_1 strictement plus grand que 1 (à cause de l'angle droit en J_1). D'où le résultat.

Note 1. On pourrait se poser la question des coordonnées barycentriques de O.

Note 2. L'utilisation d'un logiciel de « géométrie dynamique » permet de voir qu'avec les triangles « indirects », on obtient pour lieu une seconde droite. Il semblerait que les deux lieux soient des droites parallèles.

74-2 *de Frédéric de Ligt* :

Trouver tous les triangles à côtés entiers qui possèdent deux angles dont l'un est le double de l'autre.

Je notais en commentaire de la solution apportée par Louis Rivoallan dans le numéro 75 du Corol'aire : « *La question n'est pas totalement résolue car on peut se demander quels sont les triplets d'entiers qui vérifient cette relation* ». Louis Rivoallan a répondu à cet appel.

Complément de Louis Rivoallan

J'ai repris cet exercice. Tout d'abord, on peut remarquer que si (a ; b ; c) est une solution, alors pour tout entier k, (ka ; kb ; kc) est aussi une solution. On va donc rechercher les triplets (a ; b ; c) avec pgcd (a ; b ; c) = 1. Posons $d = a + c$. Puisque c est non nul, on a $a < d$. Pour un nombre b donné, il faut donc analyser sa décomposition en un produit de deux facteurs inégaux. Le nombre de diviseurs de b^2 étant impair, pour chaque diviseur de b^2 inférieur à b, il existe un autre diviseur de b^2 supérieur à b tel que leur produit est b^2. Soit u = pgcd (a ; d). On peut alors écrire $b^2 = u^2a'd'$ avec pgcd (a' ; d') = 1. Donc u^2 divise b^2 et par conséquence, u divise b. Par suite u divise a, b et d, donc u divise leur pgcd. Puisque celui-ci, par hypothèse, est égal à 1, alors $u = 1$, autrement dit a et d sont premiers entre eux. Soit p un facteur premier entrant dans la décomposition de b. Dans la décomposition première de b^2 son exposant est pair. Ce nombre ne peut apparaître simultanément dans la décomposition de a et de d et par suite a et d sont des carrés. Posons $m = \sqrt{a}$ et $n = \sqrt{d}$. Alors $b = mn$, avec m et n entiers premiers entre eux et $m < n$, $a = m^2$ et $d = n^2$. La réciproque est évidente. L'ensemble des triplets (a ; b ; c) vérifiant $b^2 = a(a + c)$ est (km^2 ; kmn ; $kn^2 - km^2$), où m et n sont des entiers premiers entre eux et $m < n$.