me traite d'égal à égal et de cela, j'en suis très fier, je ne m'en cache pas. Lorsque, dans une de mes lettres, je lui écris que je ne possède pas son « envergure mathématique », il me répond : « *Je ne suis qu'un mathématicien de classe moyenne* ». Une estime réciproque s'installe. Malheureusement, la lente dégradation de l'état de santé de sa femme Germaine à partir de 1996-1997, une énergie décroissante pour ce type de travail malgré une vivacité d'esprit jamais démentie et nos emplois du temps très remplis contribuent petit à petit à mettre en veille notre projet.

À partir du moment où nous entreprenons notre collaboration et que j'ai connaissance de sa carrière, de ses actions pour améliorer l'enseignement des mathématiques, de ses ouvrages et de ses multiples interventions, je constate que ses idées rejoignent les miennes. Dans mes cours, quand l'occasion se présente, notamment lors d'une question d'élève et sans dire à chaque fois qu'il en est l'auteur mais en pensant bien à lui, je les diffuse. Par exemple : « *Un calcul ne s'exécute pas, il se médite* », « *Sans les techniques de mise en œuvre, les idées, si belles soient-elles, sont impuissantes ; sans les idées qui les ordonnent et les dirigent, les techniques peuvent rapidement se transformer en un fouillis inextricable. Or, c'est une perversion fréquente de l'enseignement mathématique que d'insister plus sur les techniques que sur les idées* », « *Un cours de mathématiques doit toujours être totalement transparent ; on peut tout y justifier. Tout, à coup sûr, n'est pas justifié de la même manière : un théorème l'est par sa démonstration ; un axiome par sa plausibilité [. . .] ; une définition doit être justifiée par sa pertinence* ».

Je le vois une dernière fois le samedi 12 janvier 2002 à l'INRP, rue d'Ulm à Paris, lors d'une table ronde « Mathématiques et enseignement des sciences ». Il fait partie des intervenants et dit notamment que « *si un professeur prend le temps de bien motiver une notion sans asséner des vérités toutes faites, ensuite, ça roule comme un TGV* ».

Les mathématiques me passionnent et ma rencontre avec André Revuz a accentué le plaisir d'en apprendre encore et de les enseigner. En sa mémoire, mon métier n'a qu'un seul but : que les mathématiques restent vivantes.

Hugues BIRATELLE (Melun)

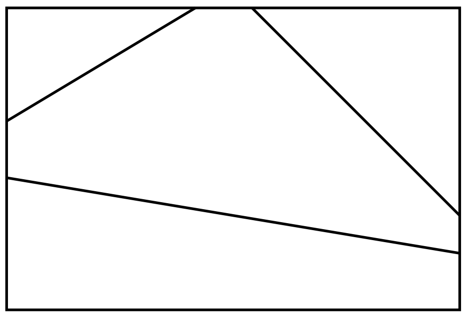
RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

75-1 *de Louis Rivoallan (Rochefort) :*
Un exercice bien connu est de devoir tracer le centre de gravité du triangle ci-contre, sans réaliser de tracés à l'extérieur de la feuille.
Une construction consiste à tracer des droites parallèles aux segments, à une distance constante, de telle sorte que le triangle obtenu ait ses trois sommets sur la feuille. Beaucoup pensent que le centre de gravité du petit triangle coïncide avec celui du grand ! Mais pourquoi ?
Pourtant ce petit triangle est bien semblable au premier puisque leurs côtés sont parallèles. Mais alors où est le centre de l'homothétie qui transforme le grand triangle dans le petit ?



75-2 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
A l'occasion d'une leçon à l'IUFM (niveau CE2) où il était question de prolonger le tracé d'une droite, m'est venue l'idée du petit exercice suivant :
Deux points A et B sont distants d'un peu moins de 20 cm. On veut tracer la droite (AB) mais la règle dont on dispose mesure à peine 6 cm. On dispose d'un compas. Comment faire pour tracer cette droite ?

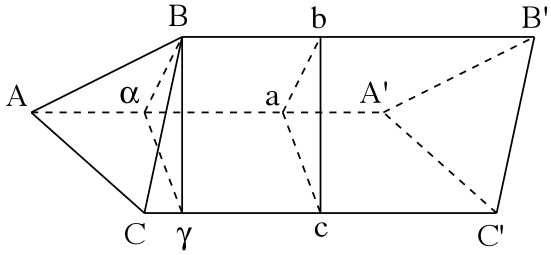
75-3 *de Jean Cordier (Mignaloux Beauvoir)* :
Soit un triangle ABC quelconque. Quel est l'ensemble des centres de gravité des triangles équilatéraux MNP tels que A appartient à [NP], B à [MP] et C à [MN] ?

75-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
De combien de façons un billet de 100 € peut-il être changé en pièces et/ou billets de 1 €, 2 €, 5 €, 10 €, 20 € et 50 € ?

Des solutions

70-2 *de Serge Parpay* :
a) Soit un prisme droit ABCA'B'C'. On veut couper ce prisme par une section droite abc en deux prismes de même volume.
h étant la hauteur du prisme, quelle sera la distance entre les plans ABC et abc ?
b) Soit un prisme oblique ABCA'B'C'. On veut couper ce prisme par une section droite abc en deux prismes de même volume.
$\alpha B\gamma$ étant une section droite du prisme, CC' = h, Aα = k, Cγ = l, quelle sera la distance entre les plans $\alpha B\gamma$ et abc ?
(On établira une condition sur h, k et l pour que la section droite abc soit effectivement réalisable).

Solution de Frédéric de Ligt



a) La distance entre les deux plans ABC et abc est bien sûr de $h/2$.
b) La pyramide ACγαB dont la base est un trapèze rectangle a le même volume qu'un prisme droit de base αBγ et de hauteur $(k + l)/3$. Si la pyramide est translatée en A'B'C', le solide ainsi réalisé est un prisme droit et la coupe se réalise comme indiqué au a). Si on replace la pyramide dans sa position initiale, on transfère ainsi un volume égal à celui d'un prisme droit de base αBγ et de hauteur $(k + l)/3$. La coupe précédente doit donc être translatée selon la direction (BB'), dans le sens de B' vers B sur une distance de $(k + l)/3$. La distance entre les plans αBγ et abc sera alors de $h/2 - (k + l)/3$. Si l'on suppose que $k \geq l$, une condition pour effectuer cette coupe et obtenir deux solides de même volume est d'avoir $h > h/2 - (k + l)/3 + k$ ou encore $h > (4k - 2l)/3$.

71-4 *de Frédéric de Ligt* :

Montrer que pour tout entier naturel non nul r et pour tout r-uplet $(a_1, \ldots, a_r)$ de réels on a l'inégalité : $\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r}\frac{a_m a_n}{m+n} \geq 0$

Solution de Louis Rivoallan

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x} \times \left(\sum_{i=1}^{r} a_i x^i\right)^2$.

On peut remarquer que $f(x) = \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r} a_m a_n x^{(m+n-1)}$. Cette fonction est continue (voir la seconde expression) et positive (voir la première expression) sur $[0 ; +\infty]$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. On a $F(x) = \sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r}\frac{a_m a_n}{m+n} x^{(m+n)}$. La dérivée de F étant positive, F est croissante sur $[0 ; +\infty]$.

On a donc $F(1) \geq F(0)$, autrement dit $\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{r}\frac{a_m a_n}{m+n} \geq 0$.

72-2 *de Gilles Bailly-Maitre transmis par Louis Rivoallan* :

Pour $n \geq 2$ on note $r(n)$ le reste de la division euclidienne de $(n - 1)!$ par $1 + 2 + \ldots + (n - 1)$. Soit E l'ensemble des nombres $1 + r(n)$ lorsque $r(n) > 0$. Que peut-on dire de l'ensemble E ?

Solution de Louis Rivoallan

Tout d'abord, on calcule quelques termes $r(2) = 0$; $r(3) = 2$; $r(4) = 0$; $r(5) = 4$; etc. C'est un bon exercice en TICE en TS que de calculer ces termes avec un tableur. Mais, avec celui -ci, on est vite limité car n! devient rapidement trop grand pour faire des calculs exacts. Il faut donc... faire des maths (théoriques). Chacun sait que $1 + 2 + \ldots + (n - 1) = (n - 1)n/2$. Les exemples ont été suffisamment nombreux cependant pour observer que pour n pair, $r(n) = 0$.
Démontrons-le. Pour n pair et $n > 2$ alors $n = 2n'$ avec $n' < (n - 1)$. Par suite $(n - 1)n/2 = (n - 1)n'$. Les facteurs $(n - 1)$ et n' étant présents dans le produit $(n - 1)!$, le reste de la division de $(n - 1)!$ par $(n - 1)n'$ est donc égal à 0.
Et quand n est impair ? Alors c'est $(n - 1)$ qui est pair, donc divisible par 2, donnant un des facteurs de $(n - 1)!$. En revanche n est premier avec $(n - 1)$. Mais l'est-il avec les nombres allant de 2 à $(n - 2)$? Si la réponse est non, c'est qu'il est factorisable par un nombre compris entre 2 et $n - 2$ et par suite $n = pq$ avec $p,q \geq 3$ d'où $p, q \leq \frac{n}{3}$ et $n \geq 9$.

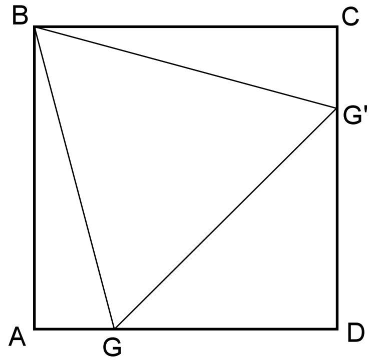
Si $p \neq q$, p et q sont deux facteurs distincts de $(n - 2)!$ et alors $r(n) = 0$.
Si $p = q$, il faut trouver (au moins) deux facteurs distincts de $(n - 2)!$ divisibles par p. Or, dans une suite de p nombres consécutifs, l'un au moins est divisible par p. En particulier dans la suite des nombres de 2 à $(n - 2)$, on trouvera donc au moins deux nombres divisibles par p puisque $2p \leq \frac{2n}{3} \leq (n - 2) - 2 + 1$ quand $n \geq 9$.

Le dernier cas à envisager est lorsque n est premier avec tous les nombres qui le précède. Dans ce cas, n est premier. Le théorème de Wilson dit alors que $(p - 1)! \equiv p - 1 \left[p \right]$ ce qui est équivalent à dire que $(p - 2)! \equiv 1 \left[p \right]$. Il existe donc un nombre k tel que : $(p - 2)! = kp + 1$. On en déduit par multiplication par $p - 1$ que $(p - 1)! = kp(p - 1) + p - 1$, et puisque $p - 1$ est pair, on a aussi $(p - 1)! = 2kp(p - 1)/2 + p - 1$. Ce qui montre que le reste $r(p) = p - 1$ et par suite $r(p) + 1 = p$. L'ensemble E cherché est donc l'ensemble des nombres premiers impairs.

72-3 *de Louis Rivoallan* :

Soit un carré de 1 m de côté ; l'artiste jette en suivant son inspiration de la peinture bleue sur la toile immaculée. C'est beau. Il se dit que pour une distance *d* assez petite, on est sûr qu'il y a toujours au moins deux points situés à la distance *d* qui seront de la même couleur.
À partir de quelle valeur de *d* cette certitude s'envole-t-elle ?

Solution de Louis Rivoallan



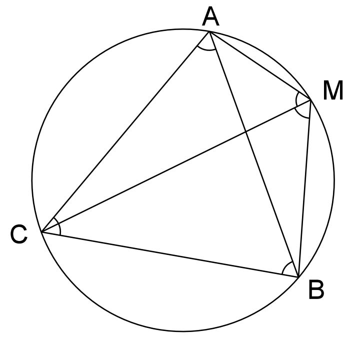
Soit *d* un nombre assez petit pour que l'on puisse tracer à l'intérieur du carré un triangle équilatéral. Puisque ce triangle a trois sommets et qu'il n'y a que deux couleurs, blanc et bleu, d'après le principe des tiroirs, au moins deux sommets distants de *d* sont de la même couleur. Cette certitude n'est donc possible que si *d* est assez petit. Il faut donc connaître la longueur du côté du triangle équilatéral le plus grand susceptible d'être tracé dans ce carré. Si on pose x = BG et y = AG on a $x^2 = 1 + y^2$ et $x^2 = 2(1 - y)^2$; on résout l'équation du second degré en y, et il apparaît que la seule solution acceptable est $y = 2 - \sqrt{3}$ et donc $x = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Pour des valeurs de *d* strictement supérieures à $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, on ne peut être certain de trouver deux points du carré de la même couleur.

N.d.l.r. Le triangle BGG' est-il bien un triangle équilatéral de taille maximale inscriptible dans le carré ABCD ? Cette question a déjà été soulevée et résolue par l'affirmative dans les Rubricollages des n° 51 et 52 de Corol'aire.

73-1 d*e Jean Christophe Laugier :*

Soit un triangle ABC équilatéral et M un point situé sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle circonscrit au triangle ABC.
Montrer que MC = MA + MB.

Solution de Frédéric de Ligt



On utilise tout d'abord la propriété de l'angle inscrit : B et M voient le segment [AC] sous le même angle, A et M voient le segment [BC] sous le même angle. On a donc $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60°$ et $\widehat{BMC} = \widehat{BAC} = 60°$. On se place ensuite successivement dans les triangles AMC et BMC et on y applique la relation d'Al Kashi :
$AC^2 = MA^2 + MC^2 - AM.CM$ et $BC^2 = MC^2 + MB^2 - MC.MB$.
En soustrayant membre à membre on obtient l'égalité : $MA^2 - MB^2 = MC.(MA - MB)$.
Mais $MA^2 - MB^2 = (MA + MB)(MA - MB)$.
Si MA est différent de MB on a donc MC = MA + MB.
Si MA = MB, comme ABC est équilatéral alors [MC] est un diamètre du cercle circonscrit, les triangles MAC et MBC sont rectangles respectivement en A et B, ce sont même des demi - triangles équilatéraux. On a donc MA = MB = rayon du cercle circonscrit.
Finalement MA + MB = 2 x rayon du cercle circonscrit = MC.

74-2 *de Frédéric de Ligt* :
Trouver tous les triangles à côtés entiers qui possèdent deux angles dont l'un est le double de l'autre.

Solution de Louis Rivoallan

Soit un triangle ABC. On pose AB = c, AC = b et BC = a. La règle du sinus dit que : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$.

Si $\widehat{B} = 2\widehat{A}$ alors $\widehat{C} = \pi - 3\widehat{A}$ et la relation précédente s'écrit alors : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin 2\widehat{A}} = \frac{c}{\sin 3\widehat{A}}$.

Pour tout réel x on a : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ et $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, et donc : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{2\sin\widehat{A}\cos\widehat{A}} = \frac{c}{3\sin\widehat{A} - 4\sin^3\widehat{A}}$.

On peut supposer que $\widehat{A} \neq 0$ et donc $\sin\widehat{A} \neq 0$ et après simplification on a : $a = \frac{b}{2\cos\widehat{A}} = \frac{c}{3 - 4\sin^2\widehat{A}}$.

On en déduit que $\cos\widehat{A} = \frac{b}{2a}$. Puisque $\sin^2\widehat{A} = 1 - \cos^2\widehat{A}$, on a la relation : $\frac{1}{a} = \frac{3 - 4\left(1 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)}{c}$ ou encore $b^2 = a(a + c)$.

N.d.l.r. La question n'est pas totalement résolue car on peut se demander quels sont les triplets d'entiers qui vérifient cette relation.