L'année s'est terminée par une publication. Les élèves des deux Lycées ont présenté leurs travaux à « Exposciences » à Niort et, à cette occasion, les participants ont pu « manipuler des mathématiques », c'est-à-dire, avec des tenons et des élastiques, sur une planche trouée, ils ont pu chercher à matérialiser les carrés dans un lacet donné : le jury a remis le prix du CNRS pour ce projet jumelé. St Jo de Bressuire a aussi présenté le projet au concours « Faites de la science » à Poitiers.

Ces deux ateliers se déroulent dans le cadre d'Ateliers Scientifiques et Techniques, ce qui permet d'obtenir quelques HSE et une dotation de la Région pour le fonctionnement.
Lors des Journées APMEP à La Rochelle, un atelier sera consacré à MATh.en.JEANS à partir des travaux d'un groupe du Lycée de Haute Altitude de Briançon ; un stand et une exposition permettront aux intéressés de découvrir des posters et la démarche mise en œuvre à l'occasion.

Pour tout contact : Cédric Jossier cedricjossier@free.fr et Gilles Maréchal gilles.marechal@ac-poitiers.fr

RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

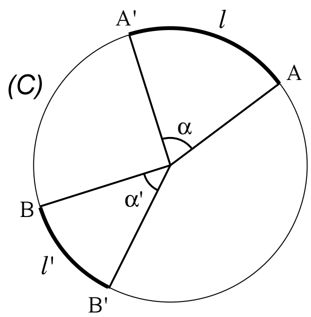
Rigueur et simplicité ne font pas toujours bon ménage quand on aborde le thème des angles. Serge Parpay nous propose de réconcilier les points de vue :

Cohérence et tolérance : longueurs et mesures d'arcs de cercle.

Préliminaire (sans volonté de provocation) : la théorie des angles est délicate ; la littérature concernant le sujet est importante, parfois délirante (pour une personne « simple »). Restons simples et n'en parlons plus !

Dans ce qui suit *L* et *A* seront les symboles des longueurs et des mesures d'arcs (ou éventuellement de mesures d'angles si on se réfère aux angles au centre correspondants) pour l'écriture des équations de dimensions.

Soit un cercle (C) de centre O de rayon R. *u* étant l'unité de longueur, la circonférence de (C) a une longueur $L = 2\pi R$, soit, écrit « à l'ancienne », $L_u = 2\pi R_u$; par exemple si *u* est le mètre (*m*), si R = 3, $L_m = 2\pi 3_m = 6\pi_m$.



Les longueurs des arcs d'un cercle sont proportionnelles à leurs mesures (« nécessité géométrique » aussi théorique qu'évidente). Une unité d'arc *v* étant choisie, soit deux arcs $\overset{\frown}{AA'}$ et $\overset{\frown}{BB'}$ du cercle (C) de longueur *l* et *l'*, de mesures α et α', on a $\frac{l}{l'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$. On a $\frac{L}{L} = \frac{A}{A}$; l'équation de dimensions est vérifiée.

On peut choisir différentes unités *v* : le radian (*rad*), le degré (°), le grade (*gr*), le millième (μ), le tour (*tr*). Le tableau ci-dessous établit la correspondance entre la longueur *l* d'un arc $\overset{\frown}{AA'}$ et la longueur L du cercle (C) et les mesures des arcs α et α' associés (la dernière ligne définit les unités).

		radian	degré	grade	millième	tour
l	α	a	b	c	d	e
L = 2πR	α'	2π	360	400	6400	1

On en déduit la formule de calcul $l = \frac{\alpha}{\alpha'} 2\pi R$ en fonction de l'unité d'arc choisie, l'unité de longueur étant par ailleurs définie : radian : $l = \frac{a}{2\pi} 2\pi R$; degré : $l = \frac{b}{360} 2\pi R$; grade : $l = \frac{c}{400} 2\pi R$; millième : $l = \frac{d}{6400} 2\pi R$; tour : $l = \frac{e}{l} 2\pi R$.

Dans chaque cas, la fraction correspond à des rapports d'arcs ; l'équation de dimensions $\frac{L}{L} = \frac{A}{A}$ est respectée. Dans les formules suivantes, ce rapport est considéré comme un nombre. Formules pour les calculs pratiques (après simplification des calculs) : radian : *l* = a R ; degré : $l = \frac{\pi b}{180} R$; grade : $l = \frac{\pi c}{200} R$; millième : $l = \frac{\pi d}{3200} R$; tour : $l = 2\pi e R$.

Il faudrait être tolérant pour les formules de calcul « à l'ancienne » du type : $l_{cm} = \frac{\pi d_\mu}{\boldsymbol{3200}} R_{cm}$ et $l_{dm} = a_{rad} R_{dm}$ et ne pas chicaner sur la cohérence pour les dimensions, cohérence qui importe peu dans ces calculs. Mémorisons la formule l = a.R et n'en parlons plus. Comme dit Léa Broutille : « *Pourvu que ça tourne à peu près rond !* ».

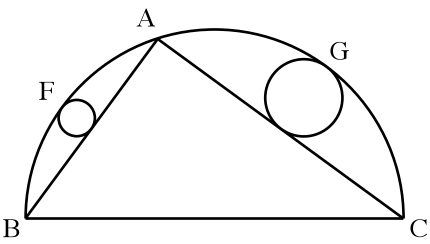
Des problèmes

74-1 *de Jean Christophe Laugier (Rochefort)* :
Points sur un même demi-cercle
1) Quelle est la probabilité que trois points placés au hasard sur un cercle soient situés sur un même demi-cercle de ce cercle ?
2) Plus généralement quelle est la probabilité que n points placés au hasard sur un cercle soient situés sur un même arc de mesure α de ce cercle ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) ?
3) Passons à la dimension supérieure : quelle est la probabilité que 4 points placés au hasard sur une sphère soient situés sur un même hémisphère de cette sphère ?
Plus généralement, quelle est la probabilité que n points placés au hasard sur une sphère soient situés sur un même polygone sphérique convexe de mesure s de cette sphère ($0 \leq s \leq 4\pi$) ?
N.B. Je n'ai pas la réponse à la question 3 !

74-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Trouver tous les triangles à côtés entiers qui possèdent deux angles dont l'un est le double de l'autre.

74-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Les points A, B, C et D sont placés dans cet ordre sur un même cercle de centre O. Sachant que O est l'isobarycentre de ces quatre points, que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

74-4 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
Dans l'énoncé ci-dessous, le vocabulaire, les notations et les formulations de l'époque ont été conservés.
Exercice n° 338 extrait des « Problèmes de mathématiques » par Ernest Lebon (Armand colin, 1898)
A étant un point quelconque d'une demi - circonférence BAC, par les points milieux des côtés BA et AC du triangle BAC, on construit deux cercles tangents aux droites BA et AC et aux arcs BFA et AGC. Soient β et γ les rayons de ces cercles et r le rayon du cercle inscrit au triangle BAC. Démontrer que l'on a la relation : $\boldsymbol{8\beta\gamma = r^2}$.



Des solutions

71-3 *de Dominique Gaud* :
Un triangle ABC étant donné, est-il possible de construire un point M sur le côté [BC] de telle sorte que les cercles inscrits dans les triangles ABM et ACM aient le même rayon ?

Les contributions à ce problème ont été abondantes et variées. Faute de place, je n'ai pas pu reproduire dans leur intégralité les courriers reçus, en revanche toutes les méthodes proposées sont présentées. Pour une meilleure lisibilité, les différentes notations des auteurs ont été harmonisées. N.d.l.r.

Solution de Louis Rivoallan

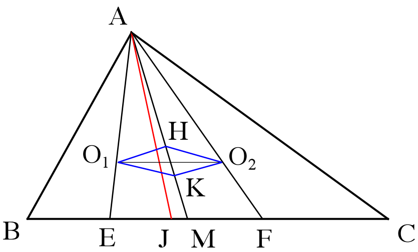


figure 1

On note O_1 et O_2 les centres respectifs des cercles inscrits dans les triangles ABM et ACM. On note E et F les intersections respectives des droites (AO_1) et (AO_2) avec [BC]. Soit H et K les projetés orthogonaux respectifs de O_1 et O_2 sur (AM). Pour la figure souhaitée, on a donc O_1H et O_2K de la même longueur, puisqu'il s'agit des rayons des cercles inscrits, et les droites (O_1H) et (O_2K) sont parallèles puisque perpendiculaires à la même droite (AM). Par conséquent O_1KO_2H est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu. Soit O ce point. La distance de O_1 à (BC) étant égale à la distance de O_2 à (BC), puisqu'il s'agit encore une fois du rayon du cercle inscrit, la droite (O_1O_2) est donc parallèle à (BC). L'homothétie de centre A qui transforme O_1 en E, transforme donc aussi O_2 en F et le milieu O de $[O_1O_2]$ en M, qui s'avère être le milieu de [EF].
En bricolant avec Géogébra, j'ai constaté que $AE^2/AB = AF^2/AC$. Pour le démontrer, je me suis placé dans un repère orthonormé…
L'auteur présente ensuite une démonstration analytique de cette égalité de rapports.

Il reste à faire la construction du point M. Il suffit pour cela de construire le point E. On note J le pied de la bissectrice de l'angle $\hat{A}$. Soit C' le point de la demi-droite [AJ] tel que AC'/AC = AB/AC = k (construction classique).

On a donc k^2 = AB/AC et par suite k = AE/AF. De plus $\widehat{(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE})}=\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ})}$. Dans la similitude de centre A, d'angle $\widehat{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ})}$ et de rapport k, F a pour image E, C a pour image C', C' a pour image B et B a pour image B' (construction classique). Par suite la droite (BC) a pour image la droite (B'C'). Le point E appartient donc à la fois à (BC) et à l'image de (BC) par la similitude, autrement dit, E est l'intersection de (BC) et de (B'C').

Solution de Daniel Daviaud

Partant du fait établi dans la solution de Louis Rivoallan, à savoir que (AM) est la médiane issue de A du triangle AEF, Daniel Daviaud propose une variante plus calculatoire pour obtenir la position du point M (voir la figure 1).

Posons, comme il est d'usage, AB = c, AC = b et BC = a. Posons ensuite u = BE, w = EM = MF, v = FC, m = AM et y = BM.

1) Expression de m^2 en fonction de a, b, c et y.

La relation d'Al Kashi donne dans ABM $m^2 = c^2 + y^2 - 2cy\cos\hat{B}$ et dans ABC $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\hat{B}$.

Donc $m^2 = y^2 - y(c^2 + a^2 - b^2)/a + c^2$.

2) Seconde expression de m^2 en fonction de a, b, c et y.

Par les bissectrices, u / c = w / m = v / b. De u / c = w / m, on tire w / m = (u + w) / (c + m) = y / (c + m). De w / m = v / b, on tire w / m = (v + w) / (b + m) = (a – y) / (b + m). D'où y / (c + m) = (a – y) / (b + m) ou encore y(b + m) = (a – y)(c +m). Finalement m = [ac – (b + c)y] / (2y – a) et donc $m^2 = [ac - (b + c)y]^2 / (2y - a)^2$.

3) Equation en y.

En égalisant les deux expressions de m^2, il vient : $(2y-a)^2\left[y^2 - y\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{a}\right)+c^2\right] = [(b+c)y - ac]^2$, de degré 4. Voici alors le boulot de Dérive : y = a ou y = 0 ou $y = \frac{a^2 - b^2 + c^2 \pm |b-c|\sqrt{(b+c)^2 - a^2}}{2a}$. En divisant le polynôme de degré 4 par y(y – a) on obtient une équation de degré 2, ce qui prouve que les solutions sont constructibles à la règle et au compas.

Comme $a^2 - b^2 + c^2 = 2ac\cos\hat{B}$ et $(b+c)^2 - a^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2bc = 2bc\cos\hat{A} + 2bc = 2bc\left(1+\cos\hat{A}\right) = 4bc\cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$, d'où en simplifiant $y = c\cos\hat{B} \pm \frac{|b-c|\cos(\hat{A}/2)\sqrt{bc}}{a}$. Si on note Q le pied de la hauteur issue de A, on a $BQ = c\cos\hat{B}$. On prendra alors la solution avec + si c < b et celle avec – si c > b. Et pour le reste on fait des constructions auxiliaires à la Descartes.

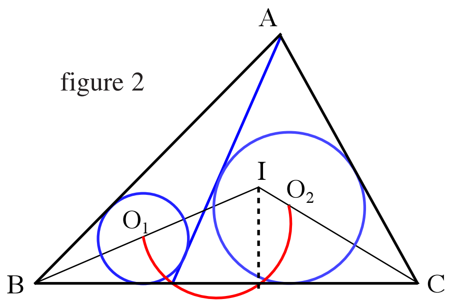


figure 2

Solution de Frédéric de Ligt

Dans le dossier « Jeux Math' » de *Pour la science* d'avril-juin 2008, en parcourant l'article de Pierre Tougne intitulé « Les joies du pliage », je tombe sur la présentation du résultat suivant : « Soit ABC un triangle quelconque et M un point arbitraire intérieur au côté [BC]. Construisez les centres O_1 et O_2 des cercles inscrits aux triangles ABM et AMC. Le cercle de diamètre $[O_1O_2]$ coupe [BC] en M (en effet (MO_1) et (MO_2) sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{BMA}$, donc l'angle $\widehat{O_1MO_2}$ est droit) et en un deuxième point P…**fixe** quel que soit M. On peut même préciser la position de ce dernier point : c'est le point de contact du cercle inscrit à ABC (de centre I) avec le côté [BC] » (figure 2). Suit une démonstration à l'aide d'un pliage due à J. Justin. L'article donne aussi une piste pour une démonstration plus classique. Je vous laisse le plaisir de découvrir par vous-même une preuve de cette propriété. Celle-ci va me servir d'appui pour proposer une construction assez simple du point M quand les rayons des cercles inscrits sont égaux.

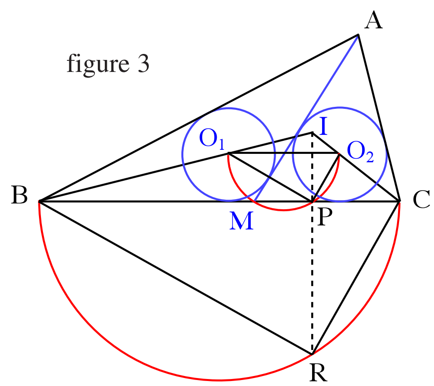


figure 3

Construction du point M (figure 3).

Le point I, centre du cercle inscrit à ABC est construit, il se projette orthogonalement sur le côté [BC] en P. Le demi-cercle de diamètre [BC] rencontre la demi-droite [IP) en R. Le point P se projette sur [BI] parallèlement à (RB) en O_1 et sur [IC] parallèlement à (RC) en O_2. Le point M cherché est le second point d'intersection du demi-cercle de diamètre $[O_1O_2]$ avec le côté [BC]. Pour justifier cette construction, il faut tout d'abord rappeler l'égalité des rayons des cercles inscrits ce qui entraîne que $[O_1O_2]$ est parallèle à [BC] et considérer enfin l'homothétie de centre I qui amène R en P et qui donc, grâce à ses propriétés de conservation, transforme le triangle rectangle BRC en le triangle rectangle O_1PO_2.

Solution de Jean Cordier

L'auteur de la solution qui suit a aussi proposé une solution par l'analytique donnant en finale une équation de degré 2. Il obtient le rayon dans le cas particulier de « cercles intérieurs au triangle». Sa méthode permet d'envisager les cas de cercles tangents aux prolongements des côtés, les points E, F et M pouvant sortir du triangle. Les calculs sont un peu longs et la place a manqué pour les présenter. N.d.l.r.

On a transformé le problème par une homothétie de centre A qui a envoyé les centres des cercles sur la droite (BC) et on cherche donc à résoudre un problème où les centres et M sont à chercher sur [BC]. On suppose le problème résolu.

On trace la parallèle issue de E à la droite (AB) et celle issue de F à (AC). Elles se coupent en L qui est équidistant de (AB) et (AC), et L est donc sur la bissectrice (AJ) de l'angle Â. Soit l'homothétie h de centre J telle que h(E) = B, alors par le parallélisme, h(L) = A et h(F) = C (figure 4).

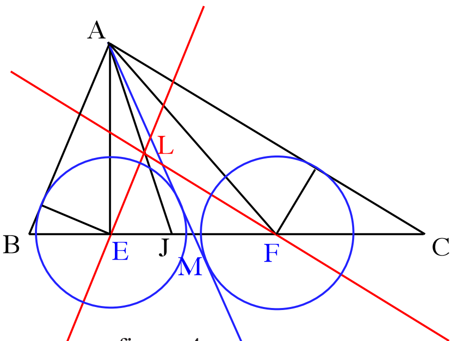
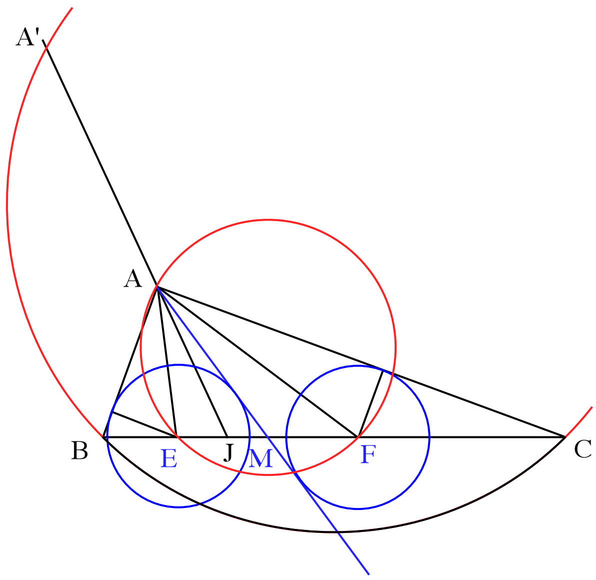


figure 4

Calcul d'angle et image d'un cercle (figure 5). En A, un calcul simple montre l'égalité angulaire $\widehat{EAF}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Construisons le cercle (T) circonscrit au triangle AEF. Posons A' = h(A). L'image (T') du cercle (T) est circonscrite au triangle (A'BC) image du triangle (EAF). On a bien sûr l'égalité d'angles $\widehat{BA'C}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Et cette égalité dit que le point A' est sur un arc inclus dans (T') dont les points N vérifient $\widehat{BNC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Le point A' est ainsi dans l'intersection d'un tel arc et de la droite (AJ). Et c'est l'obtention du point A' qui est à la base de ce qui suit.



Construction du point M en partant du triangle ABC. Afin de construire A', on construit à la règle et au compas les arcs formés des points N tels que $\widehat{BNC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (il y a deux arcs symétriques par rapport à (BC)) et on construit (AJ) la bissectrice de $\widehat{BAC}$ qui coupe les arcs en questions en des points A' cherchés. On prend un des points A'. L'homothétie h' (inverse de h) de centre J telle que h'(A') = A permet, par parallélisme, de construire les images par h' de B et C, donc les points E et F. On achève la construction par les cercles et la droite (AM) qui leur est tangent.

Assemblée Générale de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Mercredi 3 décembre à 14 h 30, au Lycée de l'Image et du Son d'Angoulême

suivie d'une conférence de Mustapha RAÏS, professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Poitiers.