



Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.
Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

73-1 de Jean Christophe Laugier (Rocheport) :

Exercice tiré du recueil d'exercices de Mathématiques de Première de A. Combes (1967)

Soit un triangle ABC équilatéral et M un point situé sur le petit arc $\widehat{AB}$ du cercle circonscrit au triangle ABC.

Montrer que $MC = MA + MB$.

N.B. Dans l'énoncé original, il y a évidemment une question préliminaire (cet exercice s'adresse à des élèves de Première !) que j'ai supprimée pour que cet énoncé soit plus excitant ou *sexy* comme dirait l'Inspecteur Moisan !

73-2 de Louis Rivoallan (Rocheport) :

ABC est un triangle non rectangle d'orthocentre H ; A', B' et C' sont les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles BCH, ACH et ABH. Montrer que ABC et A'B'C' ont la même aire.

Dans le prolongement de l'exercice précédent, Louis Rivoallan a observé, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, la particularité suivante :

Pour tout point M intérieur à un triangle ABC, en notant A', B' et C' les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles BCM, ACM et ABM, il semblerait que l'aire de ABC soit toujours inférieure ou égale à celle de A'B'C'. Cela reste à établir.

73-3 de Jean Cordier (Mignaloux Beauvoir) :

Sur un triangle quelconque ABC on place les points I sur (BC), J sur (AC) et K sur (AB) de telle sorte que IJK forme un triangle équilatéral dont les sommets se lisent dans le même sens que ceux du triangle initial.

Quel est l'ensemble des centres de gravité des triangles IJK ?

Soit f la fonction donnant l'aire du triangle IJK. Cette fonction admet-elle une valeur minimale ? Peut-on alors construire le triangle correspondant à la règle et au compas ?

Des solutions

N.d.l.r. La solution de Louis Rivoallan au problème 71-3, annoncée dans le précédent Corollaire, est reportée au prochain numéro afin de la réunir avec les diverses contributions qui nous sont parvenues depuis sur ce difficile mais stimulant exercice proposé par Dominique Gaud.

68-4 de Jacques Chayé :

Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle et soit $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$. Démontrer que $\frac{3}{2} \leq S \leq 2$.

Solution de Jean Christophe Laugier :

N.d.l.r. Jean Christophe Laugier revient sur cet exercice pour proposer une troisième solution.

Démontrons tout d'abord que $3/2 \leq S$.

$$\text{On peut écrire : } S = \left(\frac{a+b+c}{b+c} - 1 \right) + \left(\frac{a+b+c}{c+a} - 1 \right) + \left(\frac{a+b+c}{a+b} - 1 \right) = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3.$$

$$\text{Puisque la fonction } x \mapsto 1/x \text{ est strictement convexe sur }]0 ; +\infty[, \text{ on a donc } \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 3 \frac{1}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}.$$

$$\text{D'où } S \geq (a+b+c) \times \frac{9}{2(a+b+c)} - 3 \text{ soit } S \geq \frac{3}{2} \text{ et l'égalité sera atteinte lorsque } b+c = c+a = a+b \text{ c'est à dire } a=b=c.$$

Montrons à présent que $S \leq 2$. Puisque a, b, c représentent les côtés d'un triangle, on a : $a \leq b+c$, $b \leq c+a$, $c \leq a+b$.

Effectuons le changement de variables défini par : $a' = b+c-a$; $b' = c+a-b$; $c' = a+b-c$.

Soit $a = (b'+c')/2$; $b = (c'+a')/2$; $c = (a'+b')/2$ ($a', b', c' \geq 0$).

$$\text{Il vient } S = \frac{b'+c'}{b'+c'+2a'} + \frac{c'+a'}{c'+a'+2b'} + \frac{a'+b'}{a'+b'+2c'}. \text{ Comme } a', b', c' \geq 0, \text{ on a donc } S \leq \frac{b'+c'}{b'+c'+a'} + \frac{c'+a'}{c'+a'+b'} + \frac{a'+b'}{a'+b'+c'} = 2.$$

Plus précisément, si $a', b', c' > 0$, alors $S < 2$. L'égalité $S = 2$ ne peut donc être atteinte que si l'un des nombres a', b', c' est nul.

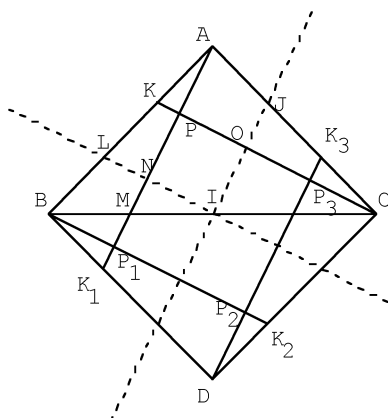
exemple $a' = 0$; il vient $S = 1 + \frac{c'}{c'+2b'} + \frac{b'}{b'+2c'}$ et l'on voit aisément que $S = 2$ lorsque $b' = 0$ ou (exclusif) $c' = 0$. Donc $S = 2$ lorsque deux

nombres exactement parmi a', b', c' sont nuls c'est à dire lorsque le triangle de côtés a, b, c est dégénéré avec deux sommets confondus.

69-2 de Gilles Auriault :

ABC est un triangle rectangle isocèle en A. K et J sont au tiers des longueurs des côtés respectifs [AB] et [AC] à partir de A. L est le milieu de [KB], I est le milieu de [BC] et M est le milieu de [BI]. Démontrer que INPO est un carré (autre question qui présente moins d'intérêt : calculer l'aire de INPO en fonction de celle de ABC).

Solution de Frédéric de Ligt :



On complète la figure en un carré ACDB de centre I. Soit r la rotation de centre I qui amène A en B, on note tout d'abord $K_1 = r(K)$, $K_2 = r(K_1)$ et $K_3 = r(K_2)$. On établit que M est bien l'intersection de $[AK_1]$ et de $[BC]$: $[BK_1]$ est parallèle à $[AC]$, $BK_1 = AC/3$ et on a bien $BM = MC/3$. P est donc le point d'intersection de $[CK]$ avec $[AK_1]$. On note maintenant P_1 celui de $[AK_1]$ avec $[BK_2]$, P_2 celui de $[BK_2]$ avec $[DK_3]$ et P_3 celui de $[DK_3]$ avec $[CK]$, on a alors $P_1 = r(P)$, $P_2 = r(P_1)$ et $P_3 = r(P_2)$ et $PP_1P_2P_3$ est donc un carré de centre I. Dans le trapèze KPP_2B , L est le milieu de $[KB]$ et I est le milieu de $[PP_2]$ donc les droites (LI) et (BP_2) sont parallèles. Dans le trapèze KBP_1P , L étant le milieu de $[BK]$, la droite (LN) étant parallèle à la droite (BP_1) alors N est le milieu de $[PP_1]$. Par ailleurs $r^{-1}(L) = J$ d'où $r^{-1}(N) = O$ et donc O est le milieu de $[PP_3]$. INPO est finalement un carré qui représente $1/5$ du carré ACDB.

71-1 de Jacques Chayé :

Soit ABC un triangle isocèle de base [BC] fixe. Le sommet A est variable sur une demi-médiatrice d de [BC]. La bissectrice de l'angle en B du triangle coupe [AC] en P. Le point M est le milieu du segment [BC].

1°) Montrer que, quand le point A tend vers le point M, le point P tend vers un point P_0 que l'on précisera.

2°) Quel est l'ensemble décrit par P quand A décrit d ?

Solution de Louis Rivoallan :

1) P étant le pied de la bissectrice issue de B, il est le barycentre du système $\{(A; CB); (C; BA)\}$. En passant aux limites, on a $\lim_{A \rightarrow M} \text{Bary}\{(A; CB); (C; BA)\} = \text{Bary}\{(M; CB); (C; BM)\}$. Puisque M est le milieu de [BC], on a $P_0 = \text{Bary}\{(M; 2); (C; 1)\}$.

On en déduit que P_0 est au tiers de [BC] en partant de C.

Prenons un repère orthonormé $(M; \vec{i}, \vec{j})$ tel que les coordonnées de B et C soient respectivement $(-1; 0)$ et $(1; 0)$, et soit 2θ la mesure de $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BA})$, avec $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$. Les coordonnées de A sont alors $(\theta; \tan 2\theta)$, et les équations des droites (AC) et

(BP) sont respectivement $y = -\tan 2\theta(x-1)$ et $y = \tan \theta(x+1)$. Le point P a donc pour coordonnées les solutions du système

formé par les deux équations précédentes. Si on pose $t = \tan \theta$, on obtient $x = \frac{1+t^2}{3-t^2}$ et $y = \frac{4t}{3-t^2}$ avec $t \in]0; 1[$. On en

déduit alors l'équation cartésienne de la courbe $y = \sqrt{(3x-1)(x+1)}$ avec $x \in]\frac{1}{3}; 1[$ qui est une partie d'hyperbole.

71-2 de Frédéric de Ligt :

À partir d'un triangle ABO isocèle et rectangle en O, on construit d'une part un arc de cercle de centre O et d'extrémités A et B et d'autre part un demi-cercle de diamètre [AB]. Ces deux arcs de cercle délimitent alors une lunule. La médiatrice de [AB] coupe [AB] en I, l'arc de cercle en D et le demi-cercle en C. M est un point quelconque du demi-cercle. Le segment [OM] coupe l'arc de cercle en L. La droite perpendiculaire à [AB] passant par M coupe le segment [AB] en N. Il s'agit d'établir l'égalité des aires de la portion de lunule AML et du triangle ANO.

Solution de Serge Parpay :

Lunule et triangle

1) Soit le cercle (I) de centre I de diamètre [AB], le diamètre [OC] perpendiculaire à [AB], le cercle (O) de centre O de rayon [OA] (figure 1).

Soit les deux lunules a et c et le triangle b, d'aires respectives a, c, b.

On a : $a + c = \frac{1}{2}\pi IA^2$ et $b + c = \frac{1}{4}\pi OA^2 = \frac{1}{4}\pi (IA\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\pi IA^2$; en conséquence, on a $a = b$.

La lunule a et le triangle b ont même aire.

Remarque : cet exercice est classique.

2) On reprend les données de 1) pour la figure 2.

Soit M un point du cercle (I) tel que $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}) = \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, N pied de la perpendiculaire abaissée de M sur [IA] et K inter-

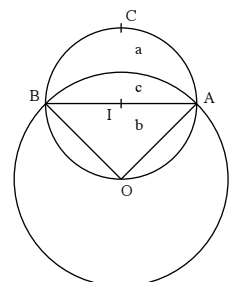


Figure 1

section de (OM) avec (AB).

On détermine ainsi les domaines a et c d'aires respectives a et c et les triangles IKM, KON et NOA, d'aires respectives d, e et b (pour la clarté de la figure le segment [NM] n'a pas été tracé).

$$(\overline{OA}, \overline{OM}) = \frac{\theta}{2}, \text{ (angle inscrit pour le cercle (I) interceptant le même arc que}$$

l'angle au centre $(\overline{IA}, \overline{IM})$).

$$\text{On a } a + d + c = \theta \cdot IA^2 \text{ et } c + e + b = \frac{\theta}{2} OA^2 = \frac{\theta}{2} (IA\sqrt{2})^2, \text{ d'où}$$

$$a + d + c = c + e + b, \text{ soit } a + d = e + b.$$

Le triangle IOM est isocèle, donc $(\overline{OK}, \overline{OI}) = (\overline{MI}, \overline{MK})$, (MN) et (IO) sont parallèles, donc $(\overline{OK}, \overline{OI}) = (\overline{MK}, \overline{MN})$ (angles alternes - internes).

$(\overline{MI}, \overline{MK}) = (\overline{MK}, \overline{MN})$, (MK) est bissectrice de $(\overline{MI}, \overline{MN})$, H étant le pied de la perpendiculaire abaissée de K sur IM, on a KH = KN. (figure 3)

$$d = \frac{1}{2} \cdot MI \cdot KH \text{ et } e = \frac{1}{2} \cdot NK \cdot IO, \text{ donc } d = e. \text{ Par suite } a = b.$$

Remarque : l'égalité des aires d et e pourrait aussi être montrée en utilisant le fait que (MK) est bissectrice du triangle MIN, et donc que $IK/KN = MI/MN$, soit $\frac{1}{2} \cdot IK \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot KN \cdot IO$.

Les deux domaines a et b de la figure 1 ont même aire.

3) On reprend les données de 1) pour la figure 4.

Soit M un point du cercle (I) tel que $(\overline{IA}, \overline{IM}) = \theta, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, L et N sont définis comme dans 2).

On détermine les domaines a, b, a' et b' d'aires respectives a, b, a' et b'.

En utilisant le résultat obtenu en 2), le point B jouant de rôle du point A de la figure 2, on montre que $a' = b'$.

En utilisant le résultat obtenu en 1), on a $a + a' = b + b'$, et par suite $a = b$.

Les deux domaines a et b de la figure 3 ont même aire.

Remarque : On pourrait directement raisonner sur la figure 2 comme sur la figure 1 à partir des mêmes domaines, mais avec l'égalité $a + c - d = c + b - e$.

Si l'on voulait garder l'égalité $a + c + d = c + b + e$, il faudrait considérer les domaines orientés ; dans ces conditions une seule démonstration suffirait pour 2) et 3).

4) Dans le cas « médian », M est en C et L en D (fig.2 ou fig.3) ; on a, en reprenant les notations de la figure 3, $a = a' = b = b'$.

Les domaines ont même aire.

5) Conclusion : quelle que soit la position de M sur le demi-cercle, le domaine limité par l'arc $\widehat{AM}$, le segment [ML] et l'arc $\widehat{LA}$ a même aire que le triangle OAN.

Remarque : cette aire est égale à $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot IO \cdot AN$. Elle est proportionnelle à AN.

Soit a la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$, $0 \leq a \leq \pi/2$, la mesure de l'angle $\widehat{MLA}$ est 2α . En orientant la droite (BA) de B vers A, on a $\overline{NA} = \overline{IA} - \overline{IN} = \overline{IA} (1 - \cos 2\alpha) = 2\overline{IA} \times \sin^2 \alpha$, et donc, dans les deux cas de figures (fig.2 et fig.3), $AN = 2 IA \sin^2 \alpha$. Comme $IO = IA$, $\mathcal{A} = IA^2 \cdot \sin^2 \alpha$.

Serge Parpay

Commentaire : cet exercice intéressant a été traité ci-dessus « à l'ancienne ». Notre collègue s'est aidé des figures géométriques (c'est le style « on voit que... »). Qui s'en plaindra ? Bien sûr, voilà — pour reprendre une formule qui fait florès — des mathématiques moins « sexy » que mon amie Léa Broutille, mais enfin !

Prof. Ila Ransor

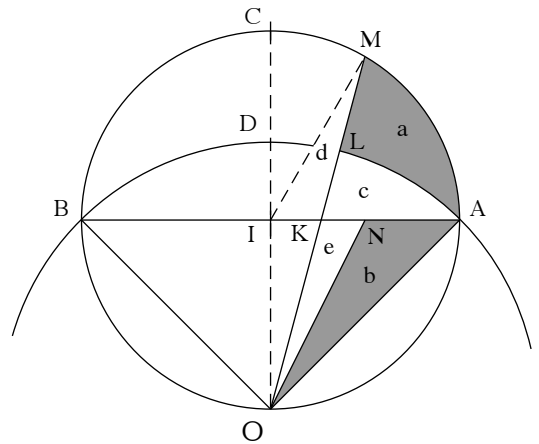


Figure 2

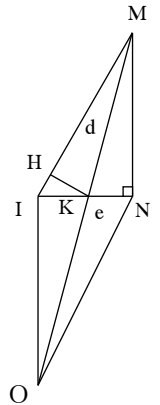


Figure 3

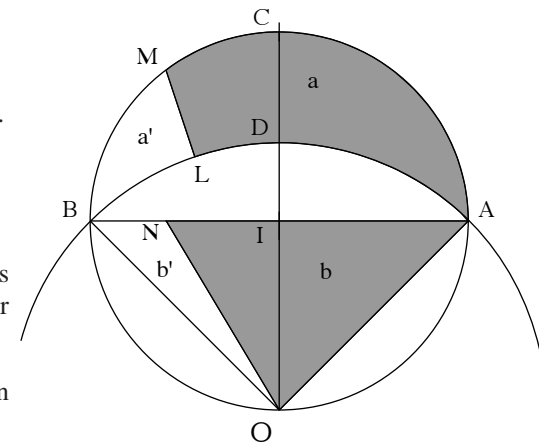


Figure 4