RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

« *If I feel unhappy, I do mathematics to become happy. If I am happy, I do mathematics to keep happy* ». Alfréd Rényi.

Jacques Chayé nous invite à un peu de mathématiques à partir d'une affirmation de l'historien grec Plutarque.

À PROPOS DE 17

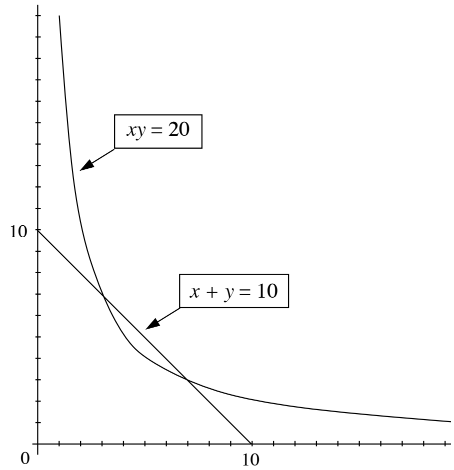
Il ne sera question ici ni de la Charente-Maritime ni de la ligne téléphonique de Police-Secours mais d'une propriété énoncée par Plutarque au sujet de la mort d'Osiris qui eut lieu le 17ème jour du mois lunaire :
« *Le nombre dix-sept intervient entre le nombre carré seize et le nombre rectangulaire dix-huit, deux nombres qui sont les seuls parmi les nombres plans à avoir un périmètre égal à l'aire du domaine qu'ils renferment.* »

La condition $a^2b = 2(a+b)$ est en effet satisfaite lorsque : $\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$ ***ou*** $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$ ***ou*** $\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases}$.

Existe-t-il d'autres solutions ?
Dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, il en existe une infinité ; par exemple dans le cas où la valeur commune aux deux membres de l'égalité est 20, les solutions sont :

$\left(5-\sqrt{5}\ ;5+\sqrt{5}\right)$ ***et*** $\left(5+\sqrt{5}\ ;5-\sqrt{5}\right)$.

Le graphique ci-contre illustre cette situation :



Mais pour le problème en question, il s'agit de « nombres plans », c'est-à-dire de nombres naturels rectangulaires ; nous allons donc chercher les solutions dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et prouver que celles signalées par l'historien grec sont bien les seules.
Soit S un nombre donné (entier naturel non nul dans le cas qui nous occupe). Pour que deux nombres aient pour somme S et pour produit $2S$, il faut et il suffit qu'ils soient racines de l'équation en x : $x^2 - Sx + 2S = 0$, dont le discriminant est $\Delta = S^2 - 8S = S(S-8)$.
Puisque $S > 0$, cette équation a des racines réelles si et seulement si $S \geq 8$.

- Pour $S = 8$, une racine double : 4 . Nous retrouvons la solution (4 ; 4).
- Pour $S > 8$, les deux racines distinctes sont : $x' = \dfrac{S-\sqrt{S^2-8S}}{2}$ et $x'' = \dfrac{S+\sqrt{S^2-8S}}{2}$

En particulier, pour $S = 9$, les deux racines sont 3 et 6 ; nous retrouvons la solution (3 ; 6) et bien sûr la solution symétrique (6 ; 3). Or, soit f la fonction $S \mapsto S-\sqrt{S^2-8S}$ de $[8\ ;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$; elle est strictement décroissante car :

$f'(S) = 1-\dfrac{2S-8}{2\sqrt{S^2-8s}} = \dfrac{\sqrt{S^2-8S}-(S-4)}{\sqrt{S^2-8S}}$, et le numérateur de cette fraction est bien négatif (il suffit de comparer les carrés de chacun des termes, positifs, de cette différence pour s'en convaincre). Les seules valeurs entières possibles pour x' sont donc entre 0 et 3 : à savoir 2 et 1. Cependant, l'équation : $\dfrac{S-\sqrt{S^2-8S}}{2} = 2$ qui s'écrit encore : $S-4 = \sqrt{S^2-8S}$ implique :

$S^2 - 8S + 16 = S^2 - 8S$, équation sans solution. De même, l'équation : $\dfrac{S-\sqrt{S^2-8S}}{2} = 1$ qui s'écrit encore : $S-2 = \sqrt{S^2-8S}$ implique : $S^2 - 4S + 4 = S^2 - 8S$, c'est-à-dire : S = -1, équation sans solution dans $[8\ ;+\infty[$.

> En résumé, deux entiers naturels a et b vérifient $a^2b = 2(a+b)$ si et seulement si : $\begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$ ***ou*** $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$ ***ou*** $\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases}$.

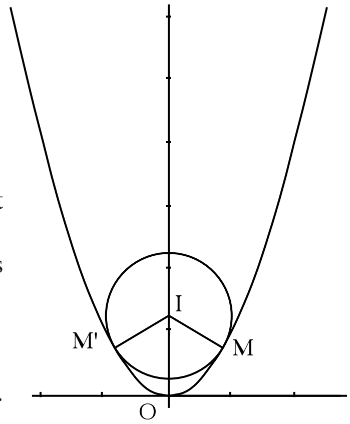
AUTRE DÉMONSTRATION :

Montrons que, pour que x' et x'' soient des entiers, la condition $S = 8$ ou $S = 9$ est nécessaire (on vérifie facilement comme plus haut qu'elle est suffisante).
En effet, supposons x' et x'' entiers, alors Δ est nécessairement le carré d'un entier (car S est lui-même entier) ; il existe donc un entier k tel que : $S(S-8) = k^2$.

Posons $S = s + 4$, alors $(s + 4)(s – 4) = k^2$ donc $s^2 - 16 = k^2$ donc $(s – k)(s + k) = 16$.
Or, les seules décompositions, à l'ordre près, de 16 en produit de deux entiers sont : 1 x 16, 2 x 8 et 4 x 4, on a donc,

soit $s – k = 1$ et $s + k = 16$, mais $2s$ ne peut pas être égal à 1
soit $s – k = 2$ et $s + k = 8$, qui entraîne $s = 5$, c'est-à-dire $S = 9$,
soit $s – k = 4$ et $s + k = 4$, qui entraîne $s = 4$, c'est-à-dire $S = 8$. C.Q.F.D.

Des problèmes



72-1 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :
Un cercle de rayon 1 est centré sur l'axe de la parabole ayant pour équation $y = x^2$ par rapport à un repère orthonormé.
Préciser l'ordonnée h du centre I de ce cercle (h > 1) s'il est tangent à la parabole en deux points M et M'.

72-2 *de Gilles Bailly-Maitre transmis par Louis Rivoallan* :
Pour $n \geq 2$, on note $r(n)$ le reste de la division euclidienne de $(n – 1)!$ par $1 + 2 + \ldots + (n – 1)$.
Soit E l'ensemble des nombres $1 + r(n)$ lorsque $r(n) > 0$. Que peut-on dire de l'ensemble E ?

72-3 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Soit un carré de 1 m de côté ; l'artiste jette en suivant son inspiration de la peinture bleue sur la toile immaculée. C'est beau. Il se dit que pour une distance *d* assez petite, on est sûr qu'il y a toujours au moins deux points situés à la distance *d* qui seront de la même couleur.
À partir de quelle valeur de d cette certitude s'envole-t-elle ?

Rectificatif au Corol'aire 71.
Dans l'énoncé 71.1 proposé par Jacques Chayé, il faut préciser que le point M est le milieu du segment [BC]. Nous vous prions de nous excuser pour cet oubli qui est de notre fait.

Des solutions

70-3 *de Frédéric de Ligt* :
Une affirmation de Jean Dhombres, dans son article « *L'avenir de l'enseignement des mathématiques n'est pas un long fleuve tranquille* » paru dans le bulletin vert n° 471, placée au bas de la page 479, et à laquelle je vous renvoie, me suggère l'énoncé suivant :

Peut-on exhiber une fonction *f*, infiniment dérivable sur R, qui ne soit pas de la forme $x \mapsto \mathrm{Y}e^{kx}$ (Y et k réels) et vérifiant pourtant la relation de demi-vie, à savoir $f\left(x + x_{DV}\right) = f(x)/2$?

Solution de l'auteur
On peut prendre $x_{\mathrm{DV}} = 2$, afin d'alléger les expressions, sans nuire pour autant à la généralité du propos.

Pour *n* entier relatif, on note $\mathrm{I}_n =]-1+2n\ ;1+2n[$ et $\mathrm{I} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{I}_n$. Soit *f* la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{(x-2n)^2-1}}$ et par $f(x) = 0$ pour *x* dans $\mathbb{R}-\mathrm{I}$. La fonction *f* est clairement infiniment dérivable sur I, de plus on vérifie sans difficulté qu'elle est continue en 0. On établit alors par une récurrence sur l'entier k à partir de 0 que les dérivées k$^{\text{ème}}$ à droite et à gauche aux points de $\mathbb{R}-\mathrm{I}$ sont toujours égales à 0 (en utilisant le fait que toute fonction puissance est négligeable à l'infini devant la fonction exponentielle). Par conséquent, pour tout entier relatif n et pour tout entier k, on a $f^{(k)}(1+2n) = 0$. La fonction f est donc infiniment dérivable sur R et on vérifie que l'on a bien $f(x + 2) = f(x)/2$. Cette fonction n'est même pas décroissante et vérifie pourtant la relation de demi-vie.

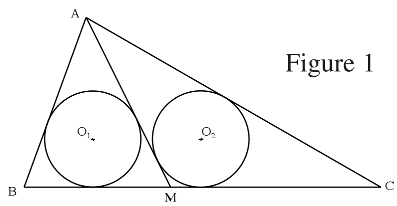


Figure 1

71-3 *de Dominique Gaud* :
Triangles et cercles inscrits
Soit un triangle ABC. Déterminer un point M sur le segment [AB] tel que les cercles inscrits dans les triangles ABM et AMC aient même rayon (fig.1).

Solution de Serge Parpay :

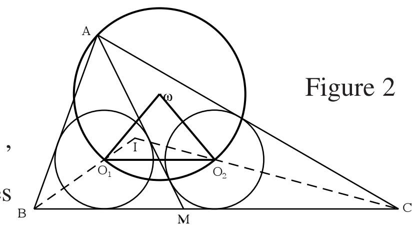


Figure 2

1) Supposons le problème résolu (fig. 2).

Soit (O_1) et (O_2) les centres des deux cercles inscrits. O_1 est sur la bissectrice de $\widehat{\mathrm{ABM}}$, O_2 est sur la bissectrice de $\widehat{\mathrm{MCA}}$, ces deux bissectrices se coupant en I. Les deux cercles ayant même rayon, (O_1O_2) est parallèle à (BC). O_1 est sur la bissectrice de $\widehat{BAM}$, O_2 est sur la bissectrice de $\widehat{MAC}$.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}\right)$. Le triangle AO_1O_2 est inscrit dans un cercle (ω) tel que $\left(\overrightarrow{\omega O_1}, \overrightarrow{\omega O_2}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

2) Construction : Soit un cercle (ω') de centre ω' répondant aux conditions suivantes : deux points O_1', O_2' sont arbitrairement choisis sur [BI] et [CI] tels que (O_1'O_2') soit parallèle à (BC) ; le point ω' est le point de la médiatrice de [O_1'O_2'] tel que $\left(\overrightarrow{\omega' O'_1}, \overrightarrow{\omega' O'_2}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$; le cercle (ω') de centre ω' et de rayon ω'O_1' (fig.3).

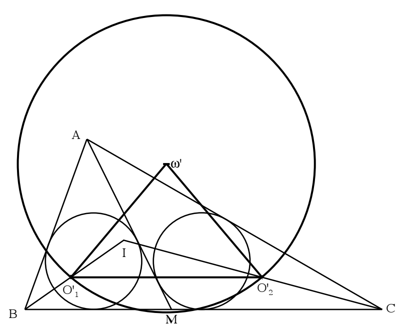


Figure 3

Soit le point A', intersection de la demi-droite [IA) d'origine I avec le cercle (ω'). L'homothétie $\mathcal{H}$, de centre I de rapport IA/IA', transforme (ω') en un cercle (ω) dont le centre ω est à l'intersection de (I ω') et de la parallèle à (A'ω') passant par A.
(ω) coupe [BI] en un point O_1 et [CI] en un point O_2 (fig.4).

$$2\left(\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}\right) = \left(\overrightarrow{\omega O_1}, \overrightarrow{\omega O_2}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \ ; \ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO_1}\right) + \left(\overrightarrow{AO_2}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AO_2}\right).$$

On peut déterminer un point M (unique) de [BC] tel que

$$\left(\overrightarrow{AO_1}, \overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO_1}\right) \text{ et } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO_2}\right) = \left(\overrightarrow{AO_2}, \overrightarrow{AC}\right).$$

(AO_1) est bissectrice du triangle ABM, O_1 est le centre du cercle inscrit dans ce triangle. (AO_2) est bissectrice du triangle AMC, O_2 est le centre du cercle inscrit dans ce triangle. Les deux cercles ainsi définis sont les cercles cherchés, d'où la construction.

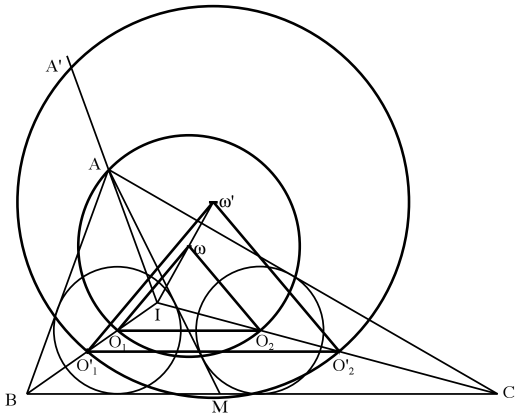


Figure 4

3) Calcul du rayon des cercles inscrits :
Rappel : dans un triangle ABC, AH hauteur, r rayon du cercle inscrit, p demi-périmètre, l'aire du triangle est $Aire = pr = \frac{1}{2} BC \cdot AH$, d'où $r = \frac{BC \cdot AH}{2p}$.

On se place dans le cas plus général où M décrit le segment [BC] et on étudie la variation des rayons r_1 et r_2 des cercles (O_1) et (O_2) inscrits dans les deux triangles ABM et AMC. Le rayon du cercle inscrit dans ABC sera noté r. (fig.5)
On place le triangle ABC de la figure 5 dans un repère orthonormé d'origine H, b étant l'abscisse de B, c l'abscisse de C, x l'abscisse de M avec $b < c$, $b \le x$, $x \le c$, h l'ordonnée de A.

Quelle que soit la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$, quand M décrit [BC] :
- O_1 décrit le segment [BI], l'aire du triangle BAO_1 est croissante ; le côté AB étant constant, la longueur de la hauteur issue de O_1 est croissante, cette longueur égale à r_1 varie de 0 à r.
- O_2 décrit le segment [IC], l'aire du triangle AO_2C est décroissante ; le côté AC étant constant, la longueur de la hauteur issue de O_2 est décroissante, cette longueur égale à r_2 varie de r à 0.

r_1 et r_2 sont fonctions de x. On pourra écrire :

$$r_1 = \frac{(x-b)h}{\left(\sqrt{h^2+b^2} + \sqrt{h^2+x^2} + x - b\right)}, \quad r_2 = \frac{(c-x)h}{\left(\sqrt{h^2+c^2} + \sqrt{h^2+x^2} + c - x\right)}.$$

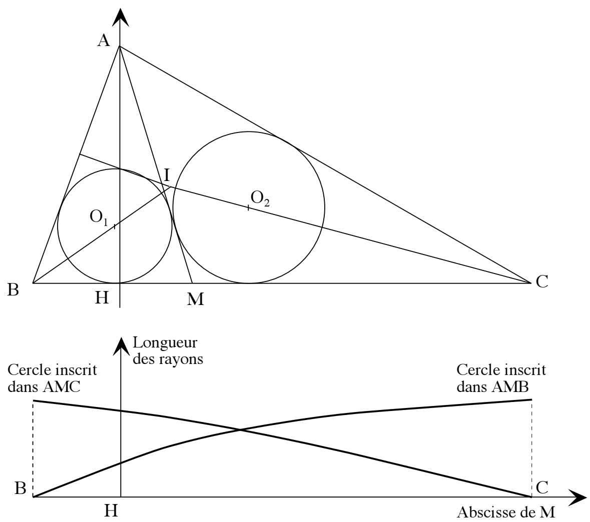


Figure 5

La fonction r_1, croissante, et la fonction r_2, décroissante, sont représentées sur la figure 5.
L'abscisse du point d'intersection des deux courbes donne l'abscisse de M, et donc la position de [AM], quand les deux cercles ont même rayon, l'ordonnée donne ce rayon. On peut calculer cette abscisse et ce rayon par encadrement à partir des fonctions r_1 et r_2.
N.d.l.r. Une autre solution de L. Rivoallan trouvera sa place dans la prochaine rubrique.