RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.

Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

71-1 *de Jacques Chayé (Poitiers)* :

Soit ABC un triangle isocèle de base [BC] fixe. Le sommet A est variable sur une demi-médiatrice d de [BC]. La bissectrice de l'angle en B du triangle coupe [AC] en P.

1°) Montrer que, quand le point A tend vers le point M, le point P tend vers un point P_0 que l'on précisera.

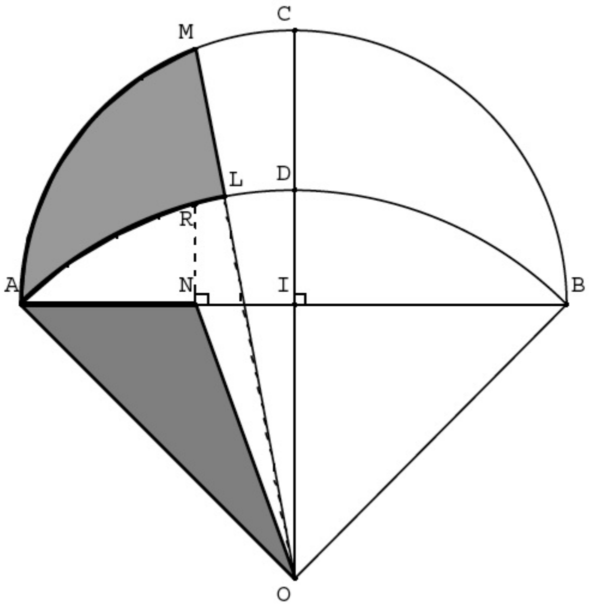
2°) Quel est l'ensemble décrit par P quand A décrit d ?

Extrait de « ANALYSE » de J.Stewart, aux éditions De Boeck.

71-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Dans un livre récent, *La quadrature du cercle*, paru en 2006 aux éditions Fayard, Marie Jacob présente une étonnante quadrature d'une portion de la première lunule d'Hippocrate de Chio qui a la particularité d'être dynamique.

Cette propriété, découverte par un mathématicien nommé Tschirnhaus, fut publié pour la première fois dans *Acta Eruditorum* en 1687. Je cite Marie Jacob : « *Malheureusement, nous n'avons pas retrouvé la démonstration de l'auteur lui-même* ». Elle précise que l'on sait seulement que Tschirnhaus a donné une démonstration à l'aide de découpage et de comparaison d'aires de la géométrie classique. Parviendrez-vous à retrouver une preuve élémentaire de ce beau résultat ?



À partir d'un triangle ABO isocèle et rectangle en O, on construit d'une part un arc de cercle de centre O et d'extrémités A et B et d'autre part un demi-cercle de diamètre [AB]. Ces deux arcs de cercle délimitent alors une lunule. La médiatrice de [AB] coupe [AB] en I, l'arc de cercle en D et le demi-cercle en C. M est un point quelconque du demi-cercle. Le segment [OM] coupe l'arc de cercle en L. La droite perpendiculaire à [AB] passant par M coupe l'arc de cercle en R et le segment [AB] en N. Il s'agit d'établir l'égalité des aires de la portion de lunule AML (zone grisée sur la figure) et du triangle ANO (seconde zone grisée).

71-3 *de Dominique Gaud (Migné-Auxances)* :

Un triangle ABC étant donné, est-il possible de construire un point L sur le côté [BC] de telle sorte que les cercles inscrits dans les triangles ABL et ACL aient le même rayon ?

Remarque. Ce joli problème, inspiré par les tracés figurant sur les ex-voto japonais, m'a suggéré un prolongement. Il semblerait, du moins est-ce ce qui apparaît lors de la manipulation d'un logiciel de géométrie dynamique, qu'en plaçant au mieux le point L sur le côté [BC], et semblablement les points M et N sur les côtés [AC] et [AB], les droites (AL), (BM) et (CN) soient concourantes. Ceci reste à prouver bien sûr. FdL.

71-4 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Montrer que pour tout entier naturel non nul r et pour tout r-uplet $(a_1, \ldots, a_r)$ de réels on a l'inégalité :

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} \frac{a_m a_n}{m+n} \geq 0$$

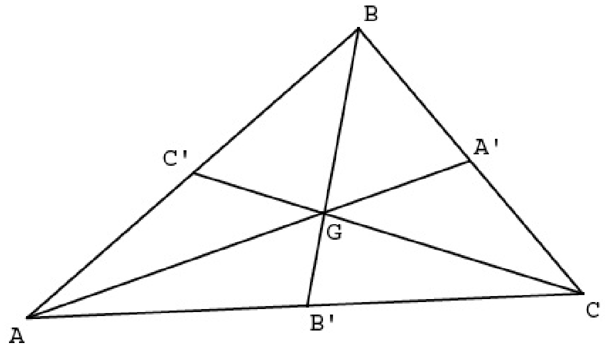
Des solutions

68-1 *de Jean-Christophe Laugier* :

Problème posé par Jacques Hadamard en 1885 dans le Journal de Mathématiques Elémentaires.

Soit ABC un triangle d'angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$; notons G le centre de gravité, A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. Les angles entre les médianes sont donnés par les formules :

$$3\ \mathrm{cotan}\widehat{B'GC'} = \mathrm{cotan}\widehat{A} - 2\ \mathrm{cotan}\widehat{B} - 2\ \mathrm{cotan}\widehat{C}$$
$$3\ \mathrm{cotan}\widehat{A'GC'} = \mathrm{cotan}\widehat{B} - 2\ \mathrm{cotan}\widehat{C} - 2\ \mathrm{cotan}\widehat{A}$$
$$3\ \mathrm{cotan}\widehat{A'GB'} = \mathrm{cotan}\widehat{C} - 2\ \mathrm{cotan}\widehat{A} - 2\ \mathrm{cotan}\widehat{B}$$



Solution de FdL **:**

On note a = BC, b = AC et c = AB. La relation d'Al Kashi donne $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. L'aire S du triangle peut s'exprimer sous la forme $\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$ d'où $\mathrm{cotan}\widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$, de même on a $\mathrm{cotan}\widehat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$ et $\mathrm{cotan}\widehat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$.

On en tire : $\mathrm{cotan}\widehat{A} - 2\mathrm{cotan}\widehat{B} - 2\mathrm{cotan}\widehat{C} = \frac{b^2+c^2-5a^2}{4S}$.

Dans le triangle C'GB' on a de façon semblable : $3\mathrm{cotan}\widehat{B'GC'} = 3\frac{GC'^2+GB'^2-C'B'^2}{4S'}$ où S' désigne l'aire du triangle C'GB'.

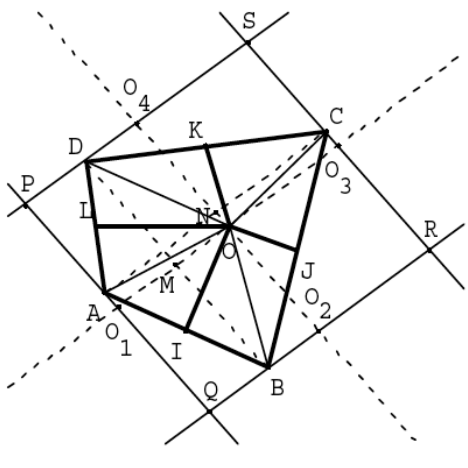
Comme les trois médianes d'un triangle partagent celui-ci en six triangles d'aires égales, l'aire du quadrilatère AC'GB' vaut le tiers de S. Par ailleurs l'aire du triangle AC'B' vaut le quart de S, d'où S' = S/3 – S/4 = S/12. On a maintenant $3\mathrm{cotan}\widehat{B'GC'} = 36\frac{GC'^2+GB'^2-C'B'^2}{4S}$. Il faut donc montrer qu'on a l'égalité : $b^2+c^2-5a^2 = 36\left(GC'^2+GB'^2-C'B'^2\right)$. On utilise pour cela l'expression qui permet d'obtenir la longueur d'une médiane dans un triangle en fonction des longueurs des côtés. On a $BB'^2 = \frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}$ et $CC'^2 = \frac{2b^2+2a^2-c^2}{4}$. Mais on a GB' = BB'/3 , GC' = CC'/3 et C'B' = a/2 d'où les expressions de GB', GC' et C'B' en fonction de a, b et c. En introduisant ces dernières dans $36\left(GC'^2+GB'^2-C'B'^2\right)$ on parvient à l'égalité voulue. On démontre de même les deux autres égalités par un simple jeu sur les lettres.

68-3 *de Gilles Auriault* :

ABCD est un quadrilatère convexe. Le problème consiste à partager ce quadrilatère en quatre quadrilatères de même aire qui ont pour sommet commun le point O. O est l'intersection de deux droites dont chacune est parallèle à une diagonale du quadrilatère ABCD et passe par le milieu de l'autre.

Solution de FdL **:**

Soit ABCD un quadrilatère convexe. Notons M le milieu de la diagonale [BD] et N le milieu de la diagonale [AC]. Formons le parallélogramme PQRS en traçant les parallèles aux diagonales du quadrilatère passant par ses sommets. Le point O est maintenant le centre du parallélogramme PQRS. Les parallèles qui ont servi à la construction du point O partagent le parallélogramme PQRS en quatre parallélogrammes superposables PO_1OO_4, SO_4OO_3, RO_3OO_2 et QO_2OO_1. L'aire du quadrilatère ADOB vaut la moitié de l'aire du parallélogramme PO_4O_2Q or ce parallélogramme à la même aire que celle du quadrilatère ABCD (le parallélogramme PQRS ayant une aire double de celle du quadrilatère ABCD), donc l'aire du quadrilatère BCDO vaut aussi la moitié de celle du quadrilatère ABCD. La médiane [OI] partage le triangle AOB en deux triangles d'aires égales, de même la médiane [ON] partage le triangle AOD en deux triangles d'aires égales. L'aire du quadrilatère OLAI vaut donc la moitié de celle du quadrilatère ODAB et finalement le quart de l'aire du quadrilatère initial ABCD. On raisonne de même pour les quadrilatères OLDK, OKCJ et OJBI où K est le milieu de [DC] et J le milieu de [BC].



69-3 *de Frédéric de Ligt* :

Quelle(s) valeur(s) faut-il donner aux réels p et q pour que le graphe de la fonction f, définie sur [-1 ; 1] par $f(x)= x^2 + px + q$, s'écarte le moins possible de l'axe des abscisses ?

Solution de FdL **:**

Notons e(p, q) la valeur maximum de |f(x)| sur l'intervalle [-1 ; 1].
Remarquons tout d'abord que $f(1) = 1 + p + q$ et $f(-1) = 1 - p + q$. La dérivée de f s'annule en $x = -p/2$. Deux cas sont à considérer selon que $|-p/2|$ est plus grand ou plus petit que 1.
Si $|-p/2| \geq 1$, f est monotone sur [-1 ; 1]. Pour p fixé e(p, q) est minimum quand $f(1) = -f(-1)$ c'est-à-dire quand $1 + p + q = -(1 - p + q)$ et donc pour $q = -1$. On a alors $f(1) = p$ et $f(-1) = -p$ et e(p, -1) =|p|.
Comme on a ici $|p| \geq 2$, e(p, -1) ≥ e(2, -1) = e(-2, -1) = 2.

Il y a deux fonctions possibles présentant cette déviation minimum: $x \mapsto x^2 + 2x - 1$; $x \mapsto x^2 - 2x - 1$.

Si maintenant $|-p/2| < 1$, c'est-à-dire si $|p| < 2$, f est strictement décroissante sur l'intervalle [-1 ; $-p/2$] et strictement croissante sur l'intervalle [$-p/2$; 1]. On a $f(-p/2) = -p^2/4 + q$. Deux cas sont à distinguer :

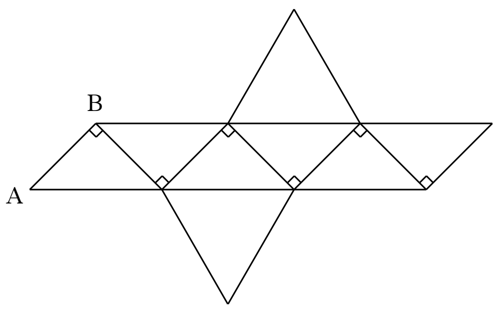
Si $-2 < p \leq 0$, on a $f(-1) \geq f(1)$. Pour p fixé dans cet intervalle, e(p, q) est minimum quand $f(-1) = -f(-p/2)$. Cette dernière égalité se traduit par $1 - p + q = p^2/4 - q$ ou encore $q = (1/2)(p/2 + 1)^2 - 1$.
e(p, $(1/2)(p/2 + 1)^2 - 1$) = $|(1/2)(p/2 + 1)^2 - p| = (1/2)(p/2 - 1)^2$. Comme $(1/2)(p/2 - 1)^2$ prend sa valeur minimum en $p = 0$ quand p prend ses valeurs dans l'intervalle]-2 ; 0] et qu'alors q vaut -1/2 on a finalement e(p, $(1/2)(p/2 + 1)^2 - 1$) ≥ e(0, -1/2) = 1/2.

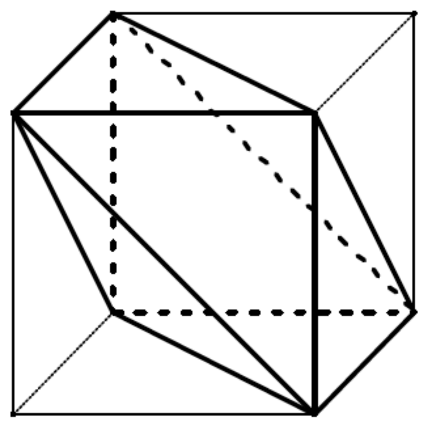
Si $0 \leq p < 2$, on a $f(1) \geq f(-1)$. Pour p fixé dans cet intervalle, e(p, q) est minimum quand $f(1) = -f(-p/2)$. Cette dernière égalité se traduit par $1 + p + q = p^2/4 - q$ ou encore $q = (1/2)(p/2 - 1)^2 - 1$.
e(p, $(1/2)(p/2 - 1)^2 - 1$) = $|(1/2)(p/2 - 1)^2 + p| = (1/2)(p/2 + 1)^2$. Comme $(1/2)(p/2 + 1)^2$ prend sa valeur minimum en $p = 0$ quand p prend ses valeurs dans l'intervalle [0 ; 2[et qu'alors q vaut -1/2 on a finalement e(p, $(1/2)(p/2 - 1)^2 - 1$) ≥ e(0, -1/2) = 1/2.
Dans les deux derniers cas considérés, la fonction dont le graphe s'écarte le moins possible de l'axe des abscisses est la même à savoir : $x \mapsto x^2 - 1/2$.
Comme on a e(2, -1) = e(-2, -1) = 2 > e(0, -1/2) = 1/2, la solution au problème posé est finalement $p = 0$ et $q = -1/2$.

70-1 *de Jean-Paul Guichard* :

Pour lancer sa nouvelle marque de jus d'orange, un fabriquant souhaite utiliser une nouvelle forme d'emballage dont voici ci-dessous un patron.
Quelle doit être au mm près la longueur AB pour que le volume de ce nouveau conditionnement soit d'un demi-litre ?

Solution de FdL **:**





Le solide peut être considéré comme un cube dont on a ôté deux coins en forme de tétraèdre comme illustré ci-dessous :
Si on note a la longueur AB, a est aussi la longueur de l'arête du cube. Le volume du solide se calcule donc de la façon suivante : $a^3 - 2\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{2a^3}{3}$. Pour un volume de 0,5 L, on trouve $a \approx \boldsymbol{9{,}1}$ cm arrondi au mm le plus proche.

Forum

Pour entrer dans le forum de discussion réservé aux adhérents, rendez-vous sur le site de la Régionale et cliquez sur « Forum échange services ». Vous vous inscrivez et un identifiant vous est attribué. Vous voulez lancer un débat, répondre au texte d'un collègue, poser une question pratique, proposer ou demander un service ? Rien de plus facile avec cet espace d'échanges très simple à utiliser. Venez nombreux le faire vivre !