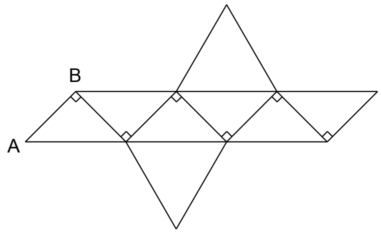
RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

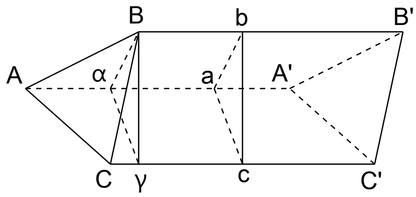
Des problèmes

70-1 *transmis par Jean-Paul Guichard d'après Math-Jeunes septembre 2006* :



Pour lancer sa nouvelle marque de jus d'orange, un fabriquant souhaite utiliser une nouvelle forme d'emballage dont voici ci-contre un patron.
Quelle doit être au mm près la longueur AB pour que le volume de ce nouveau conditionnement soit d'un demi-litre ?

70-2 *de Serge Parpay (Niort)* :



a) Soit un prisme droit ABCA'B'C'. On veut couper ce prisme par une section droite abc en deux prismes de même volume. *h* étant la hauteur du prisme, quelle sera la distance entre les plans ABC et abc ?
b) Soit un prisme oblique ABCA'B'C'. On veut couper ce prisme par une secti droite abc en deux prismes de même volume. αBγ étant une section droite du prisme, CC' = *h*, Aα = *k*, Cγ = *l*, quelle sera la distance entre les plans αBγ et abc ?
On établira une condition sur *h*, *k* et *l* pour que la section droite abc soit effectivement réalisable.

70-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Une affirmation de Jean Dhombres, dans son article : « *L'avenir de l'enseignement des mathématiques n'est pas un long fleuve tranquille* » paru dans le Bulletin Vert n° 471, placée au bas de la page 479, et à laquelle je vous renvoie, me suggère l'énoncé suivant :

Peut-on exhiber une fonction *f*, infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, qui ne soit pas de la forme $x \mapsto Ye^{kx}$ (*Y* et *k* réels) et vérifiant pourtant la relation de demi-vie, à savoir $f(x + x_{DV}) = f(x)/2$?

Des solutions

65-2 *de Léa Broutille :*
Soit deux droites d et d' perpendiculaires, O leur point d'intersection, δ et δ' les bissectrices des angles formés par ces deux droites. Un cercle Γ passant par O coupe d en A, d' en B, δ en C et δ' en D. Montrer que le quadrilatère ACBD est un carré.
Montrer que tout carré ACBD peut être « placé » sur les quatre droites, A sur d, C sur δ, B sur d', D sur δ'.

Solution de Frédéric de Ligt :

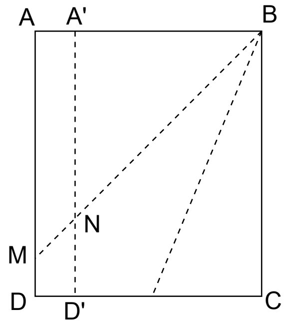
Si l'une des quatre droites est tangente au cercle, il est clair que ACBD est un carré. Sinon O est distinct de A, B, C et D. Il est alors possible de considérer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$. Ils sont droits d'après l'énoncé. [AB] et [CD] sont donc deux diamètres du cercle. Le quadrilatère ACBD est un rectangle. Notons I le centre du cercle ; puisque $\widehat{AOD}$ mesure 45°, l'angle au centre $\widehat{AID}$ est droit. ACBD est finalement un carré. Précisons la seconde question : un carré peut-il être translaté de façon à amener ses quatre sommets sur d, δ, d' et δ' ? Si les côtés du carré sont parallèles à d et d' ou bien à δ et δ', une translation qui amène un des sommets en O convient. Dans le cas contraire, traçons un segment [A'B'] parallèle à une diagonale du carré et de même longueur, avec A' sur d. Traçons ensuite une parallèle à d qui passe par B', elle recoupe d' en un point B. La parallèle à [A'B'] passant par B recoupe d en un point A. Le segment [AB] est une des diagonales du carré cherché. La fin de la construction est alors aisée.

66-3 *de Jean-Christophe Laugier :*
Soit *n* un entier ≥ 1 ; combien y a-t-il de partitions de *n* dont les sommants sont tous égaux ou prennent deux valeurs distinctes consécutives ? Par exemple pour *n* = 4, il y a quatre partitions possibles : 4, 2 + 2, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1.

Solution de Jean-Christophe Laugier :

Une partition de n répondant à la condition de l'énoncé peut s'écrire :
$n = (q +...+ q) +((q +1) +...(q + 1))$ avec $q \geq 1$, le nombre de sommants égaux à *q* étant ≥ 1 et celui des sommants égaux à $q + 1$ étant ≥ 0. Le nombre de partitions cherché est donc égal à card(A), A étant l'ensemble des triplets d'entiers (*k*, *q*, *r*) tels que :
$n = kq + r(q + 1)$ avec $q, k \geq 1$, $r \geq 0$; soit $n = (k + r)q + r = aq + r$ en posant $a = k + r$.

L'application $(k,q\,;r) \to (k,a\,;r)$ définit une bijection de A sur l'ensemble des triplets d'entiers (k, a, r) tels que $n = aq + r$ avec $q \geq 1$ et $0 \leq r < a$.
q et r sont donc respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par a.
Il sont donc déterminés de manière unique par a. Puisque a peut prendre toutes les valeurs de 1 à n, il y a donc n partitions répondant à la question.



67-3 *extrait du livre « Le fabuleux destin de* $\sqrt{2}$ *» par Benoît Rittaud (éditions Le Pommier, 2006, p.293)* :
Soit ABCD un rectangle initial quelconque. Amenons par pliage le côté [AB] sur le côté [BC], puis déplions : le segment qui marque le pli est noté [BM]. Plions ensuite le côté [BC] sur le segment [BM], ce qui amène le point C en un point noté N, puis déplions à nouveau. La parallèle au côté [AD] passant par N (qui se construit elle aussi par pliage) coupe les côtés [AB] et [CD] respectivement en A' et D', et le rectangle A'BCD' est un rectangle dont le rapport longueur/largeur est de $\sqrt{2}$. *À prouver !*

Solution de Frédéric de Ligt :

Remarquons tout d'abord que le rectangle ne peut être quelconque comme annoncé. Pour que N reste dans le rectangle initial, il faut que ses dimensions vérifient longueur/largeur < $\sqrt{2}$.
Notons M' (resp N') la projection orthogonale de M (resp N) sur [BC]. ABM'M et A'BN'N sont alors des carrés.

Finalement, BC = BN = $\sqrt{2}$ A'B. Dans le cas où longueur/largeur > $\sqrt{2}$, il faut au contraire plier [BM] sur le côté [BC], ce qui amène M en N et il faut alors plier selon la parallèle à [AB] passant par N.

68-4 *de Jacques Chayé :*

Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle et soit S = $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$. Démontrer que $\frac{3}{2} \leq S \leq 2$.

Solution de Jacques Chayé :

Supposons par exemple que $a \leq b \leq c$.
1°) Démontrons la seconde inégalité. On a : $b + c \geq a + b$ et $a + c \geq a + b$.

Par conséquent : $S \leq \frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}+\frac{c}{a+b}=1+\frac{c}{a+b}$. D'après l'inégalité triangulaire, $\frac{c}{a+b} \leq 1$. Conclusion $S \leq 2$.
2°) Essayons une méthode analogue pour la première inégalité. On a : $a + c \leq b + c$ et $a + b \leq b + c$.

Par conséquent : $S \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}=\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}=\frac{a}{b+c}+1$. Mais $\frac{a}{b+c}$ n'est pas nécessairement supérieur à 1/2. On ne peut donc pas conclure de cette manière. Si l'on transforme S en mettant les 3 rapports au même dénominateur et en faisant la somme, on obtient $S=\frac{a(c+a)(a+b)+b(a+b)(b+c)+c(b+c)(c+a)}{(a+b)(bb+c)(c+a)}=\frac{a^3+b^3+c^3+3abc+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+ca^2+c^2a}{2abc+a^2b+ab^2+bc^2+b^2c+ca^2+c^2a}=\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+1$

Il reste à démontrer que dans tout triangle : $\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1}{2}$.

Si $c = 1$, on a affaire à une famille particulière de triangles, mais tous les autres triangles se déduisent de ceux-ci par homothétie ; les sommes S relatives à deux triangles homothétiques sont égales. Nous supposons donc désormais que $c = 1$; on a donc :
$a \leq b \leq 1$ (cf. *Remarque 1* plus loin) et $S = \frac{a^3+b^3+1+ab}{(a+b)(b+1)(1+a)}+1$. Posons $h = a - 1$, $k = b - 1$ (pourquoi particulariser le couple $(1\,;1)$? cf. *Remarque 2* plus loin). Démontrons que le rapport $S' = \frac{a^3+b^3+1+ab}{(a+b)(b+1)(1+a)}$ est supérieur à 1/2.

On a $S'=\frac{(h+1)^3+(k+1)^3+(h+1)(k+1)+1}{(h+k+2)(h+2)(k+2)}$. Considérons le numérateur N et le dénominateur D de ce rapport :
$N = h^3 + 3h^2 +3h + 1 + k^3 + 3k^2 +3k + 1 + hk + h + k + 1 + 1 = h^3 + k^3 + 3h^2 + 3k^2 + 4h + 4k + hk + 4$
$D = (h +k +2)(hk +2h + 2k +4) = h^2k + hk^2 + 2h^2 +2k^2 + 6hk + 8h +8k + 8$
Il s'agit de comparer $2N = 2h^3 + 2k^3 + 6h^2 + 6k^2 + 8h + 8k + 2hk + 8$ et $D = h^2k + hk^2 + 2h^2 +2k^2 + 6hk + 8h +8k + 8$ ou encore $2h^3 + 2k^3 + 4h^2 + 4k^2$ et $h^2k + hk^2 +4hk = hk(h + k + 4)$. Puisque $0 \leq a \leq b \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq h + 1 \leq k + 1 \leq 1$ ou encore $-1 \leq h \leq k \leq 0$. On en déduit $2h^3 \geq -2$; $2k^3 \geq -2$; $4h^2 \geq 4$; $4k^2 \geq 4$. D'où $2h^3 + 2k^3 + 4h^2 + 4k^2 \geq 4$ (1).
On en déduit aussi $0 \leq hk \leq 1$ et $-2 \leq h + k \leq 0$ donc $2 \leq h + k + 4 \leq 4$ et par conséquent $0 \leq hk(h + k + 4) \leq 4$ (2). De (1) et (2) on tire $2h^3 + 2k^3 + 4h^2 + 4k^2 \geq hk(h + k + 4)$ ce qui prouve que $2N \geq D$, ou encore, puisque N et D sont positifs, que $2S' \geq 1$.
Conclusion $S \geq 3 / 2$.
Remarque 1. Pour obtenir un triangle satisfaisant à la double inégalité $a \leq b \leq 1$, il suffit de tracer un segment $[AB]$ tel que $AB = 1$, la médiatrice Δ de $[AB]$, l'arc de cercle Γ de centre A, passant par B et dont les extrémités sont sur Δ. Tout point C com-

pris entre Δ et Γ déterminera un triangle convenable.

Remarque 2. Soit f la fonction de deux variables : $(x\,;\,y) \mapsto \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}+\dfrac{1}{x+y}$ de $\mathbb{R}^{+2}$ vers $\mathbb{R}$.

Les dérivées partielles sont $f'_x(x\,;\,y) = \dfrac{1}{y+1}-\dfrac{y}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+y)^2}$ et $f'_y(x\,;\,y) = -\dfrac{x}{(y+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+y)^2}$.

Recherchons les points critiques (annulant les deux dérivées partielles).

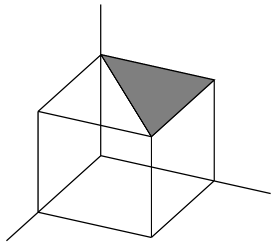
1°) Si les dérivées sont égales, alors : $\dfrac{1}{y+1}-\dfrac{y}{(x+1)^2}=-\dfrac{x}{(y+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}$ d'où $(y+1)^2 = (x+1)^2$, comme x et y sont positifs, $x = y$.

Si, en outre, ces dérivées sont nulles, on a : $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{4x^2}=0$ c'est-à-dire $\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{4x^2}=0$ soit encore $\dfrac{4x^2-(x+1)^2}{(x+1)^2\,4x^2}=0$.

Il s'ensuit : $(x-1)(3x+1) = 0$ c'est-à-dire $x = 1$ et alors $y = 1$.

2°) Réciproquement, on a bien : $f'_x(1\,;\,1) = 1/2 - 1/4 - 1/4 = 0$ et $f'_y(1\,;\,1) = -1/4 + 1/2 - 1/4 = 0$.

Conclusion : le point $(1\,;\,1)$ est le seul point critique.



Remarque 3. Les triplets $(a\,;\,b\,;\,c)$ de $\mathbb{R}^3$ qui ont été envisagés dans la démonstration de l'encadrement de S satisfaisaient aux conditions : $c = 1$ et $0 < a \leq b \leq 1$. Ils sont représentés ci-contre par le triangle grisé.

Voici une autre démonstration possible de la seconde inégalité n'utilisant que des outils du niveau lycée :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{a+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\right)\geq 0\Leftrightarrow\frac{(a-b)+(a-c)}{b+c}+\frac{(b-a)+(b-c)}{a+c}+\frac{(c-a)+(c-b)}{a+b}\geq 0$$

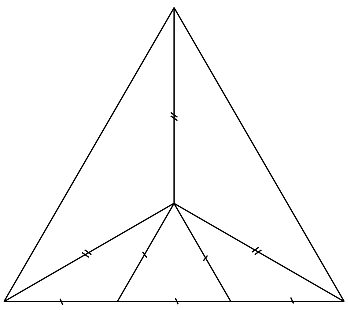
$$\Leftrightarrow (b-a)\left(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}\right)+(c-b)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}\right)+(c-a)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)\geq 0\Leftrightarrow\frac{(b-a)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(c-b)^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}\geq 0$$

Mais cette dernière inégalité est vraie avec égalité quand $a = b = c$. F. de L.

69-1 *de Jean-Paul Guichard :*

Partager un triangle équilatéral en cinq triangles isocèles.

Solution de Marc Le Metayer :



Solution de Frédéric de Ligt :