Edito

Tous sur le pont !

Dans un édito de rentrée, il est d'usage de parler du brevet, du bac, des nouveaux programmes, des réductions d'horaire, du recrutement, de la motivation des élèves, des chantiers pédagogiques en cours… Mais je vais faire exception car j'ai en envie de vous parler du projet qui va mobiliser une bonne partie de nos énergies dans les mois à venir.

L'année scolaire qui s'ouvre est importante pour notre Régionale. Les Journées Nationales de La Rochelle se profilent à l'horizon. Il va s'agir de préparer un accueil dont nous puissions être fier à un millier de participants venus de la France entière. L'objectif est de taille et nous aurons besoin de toutes les bonnes volontés pour le mener à bien. Il faut que de jeunes collègues nous rejoignent, qu'ils viennent « prêter la main ». Cet évènement fédérateur doit créer une dynamique d'échanges au sein de l'Académie. C'est un moyen efficace de se faire connaître et reconnaître auprès des collègues qui ne savent pas bien ce qui se dit et ce qui se fait à l'APMEP. Parlez-en autour de vous et profitez de l'occasion pour faire adhérer à l'association (n'oubliez pas de rappeler que les deux tiers de la cotisation sont déductibles des impôts).

Une équipe enthousiaste présentera nos Journées à Besançon le 31 octobre prochain. J'espère que vous viendrez nombreux pour les encourager.

Durant l'année, nous essaierons de maintenir nos activités habituelles (Rallye Mathématique de la sixième à la seconde, circulation d'Expocube, conférences, parution du Corol'aire…). Il aurait fallu être plus nombreux pour pouvoir tout mener de front. Nous sollicitons par avance votre indulgence.

Frédéric de Ligt

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

APMEP

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

n°70

Octobre 2007

Dispensé de timbrage

Poitiers Centre de tri

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

PRESSE
DISTRIBUÉ PAR
LA POSTE

DÉPOSÉ LE 01-10-07

Envoi de Corol'aire par courrier électronique

Il n'y a pas eu beaucoup de retours concernant votre accord pour l'envoi de Corol'aire par Mél (à peine 10 % des adhérents). Vous trouverez à nouveau dans ce bulletin un coupon-réponse. Mais vous pouvez aussi envoyer un Mél, ce qui nous facilitera la tâche.

SOMMAIRE

Édito	p. 1
Vie associative : La Rochelle 2008	p. 2
Du côté de l'IREM	p. 3
Rallye mathématique	p. 4
Perles et Billet d'humeur	p. 4
Mad Maths spectacle mathématique	p. 5
Conférences d'Ahmed Djebbar	p. 5
Rubricol'age et Défi-collège	p. 6 à 8

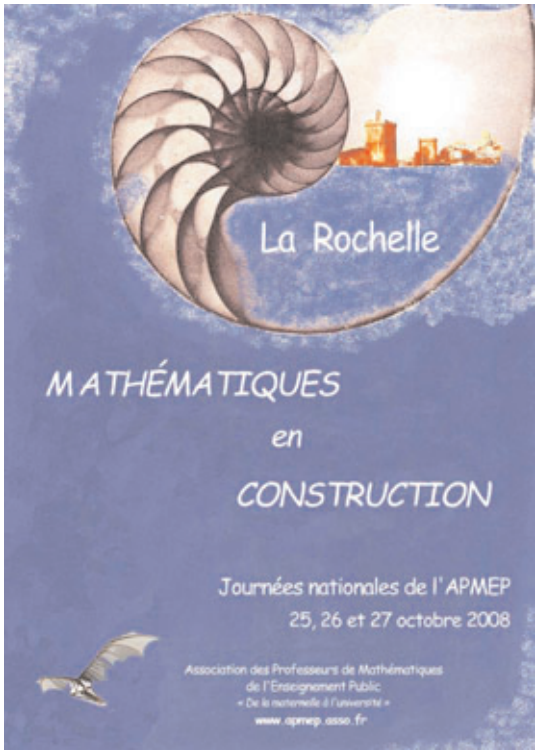
APMEP : http://irem.univ-poitiers.fr/apmep
Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Le numéro : 1,5 € .
Abonnement 1 an (4 numéros) : 5 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de LIGT
Comité de rédaction …	S. PARPAY, F. de LIGT, J. FROMENTIN,
Imprimerie ……..	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Editeur ……	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social …….	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P. ……	n° 0508G88007
Dépôt légal …….	Octobre 2007

Journées 2008 La Rochelle

L'année prochaine, les Journées Nationales de l'APMEP auront lieu à La Rochelle, les samedi 25, dimanche 26 et lundi 27 octobre.
Elles se tiendront dans les locaux du Pôle Sciences de l'université, sauf la première et la dernière demi-journée, pour lesquelles nous avons réservé l'espace Encan.
La restauration de midi sera assurée par le CROUS (dans le restaurant universitaire situé en face de la Maison de la Charente-Maritime), l'hébergement par les nombreux hôtels de la ville.
Le thème que nous avons retenu "Mathématiques en construction" pourra se décliner de trois façons : la construction des mathématiques (passé, présent, avenir) ; la construction du savoir mathématique chez l'élève (enseignement, pédagogie, didactique) ; les mathématiques dans la construction (machines, bâtiments, bateaux…). Il donnera lieu à des conférences (nous avons déjà l'accord de Jean-Pierre Bourguignon et de Bernard Vitrac), et à des ateliers (pour lesquels nous comptons notamment sur les collègues de la région).
Les exposants (éditeurs et fabricants de matériel) présenteront leurs produits.
Et nous n'oublions pas les loisirs et le tourisme, pour les soirées des congressistes et les journées des accompagnants.
L'affiche ci-contre, réalisée (comme le logo ci-dessus) par des élèves de Mme Sabourin au lycée Valin, est en cours d'impression pour être diffusée aux Journées de Besançon, où nous présenterons les Journées de La Rochelle.



En ce moment notre travail porte principalement sur deux axes :
- contacts avec les conférenciers potentiels (en partenariat avec le département de mathématiques de l'université de La Rochelle) ;
- recherche de financements (région, conseil général, ville, sponsors…).

Nous sommes actuellement une équipe de 25 personnes, mais les tâches sont multiples, et nous avons besoin de toutes les bonnes volontés, notamment sur La Rochelle et la Charente-Maritime :
n'hésitez pas à nous contacter (louis-marie.bonneval@libertysurf.fr).

Louis-Marie BONNEVAL

NDLR : Pour ceux qui recevront ce Corol'aire avec support papier, nous signalons que le fond de l'affiche est bleu (bleu du ciel et de la mer), le port de La Rochelle est dans les tons orange (chaleur et rayonnement) et le nautile de l'affiche (qui a été utilisé pour le logo) dans les tons vieux rose. Ceux qui ont accepté de recevoir le Corol'aire par courrier électronique auront le petit avantage de la couleur sur l'ensemble de ce numéro.

Réception de COROL'AIRE par courrier électronique

Nom : ..... Prénom : .....
Adresse postale : .....
.....
.....
accepte de recevoir Corol'aire par courrier électronique à l'adresse suivante* : .....

* Écrivez votre adresse très lisiblement.
À envoyer à : APMEP, Corol'aire
IREM - Faculté des Sciences, 40 Avenue de Recteur Pineau,
86022 Poitiers Cedex

Vous pouvez aussi adresser un Mél à :
apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
à partir de l'adresse à laquelle vous souhaitez recevoir Corol'aire, en précisant tout de même vos nom, prénom et adresse postale pour que nous puissions mettre à jour correctement le fichier des adhérents.

Du côté de l'IREM

Une rentrée, des projets.

La rentrée de l'IREM s'est faite à travers un séminaire de deux jours, les 14 et 15 septembre, consacrés en grande partie à la poursuite de notre projet INRP. Rappelons qu'à travers cette recherche, nous avons pour but de "motiver les mathématiques enseignées", de les sortir d'un cadre scolaire trop coupé du monde ne permettant pas de faire surgir du sens.
Notre proposition est d'organiser l'année, non pas en fonction des contenus, tels que définis dans le libellé des programmes, mais à partir de grandes questions. Bien entendu, il faut trouver de telles questions puis établir des "parcours" pour les étudier qui permettent de traiter l'ensemble du programme…
Vaste défi auquel nous travaillons actuellement aux niveaux des classes de sixième et de seconde.
Une première expérimentation a été menée l'an dernier, qui, malgré des réussites incontestables, présentait quelques lacunes et nous amène à tester cette année de nombreuses améliorations…
Cette recherche a été présentée en juin dernier à nos collègues du département de maths de l'IUFM et à nos inspecteurs, et le 14 septembre à Xavier Sorbe, inspecteur général. Celui-ci nous a assuré de son soutien pour ce travail qui lui semble aller dans le sens des préoccupations de l'institution.
D'autre part, nous avons reçu ce vendredi 21 septembre les deux responsables au niveau national de cette recherche, pour aller plus loin dans l'étude théorique notamment sur le plan didactique et préciser les concepts sous-jacents à notre démarche en vue de mieux l'analyser et l'expliciter.
Il est trop tôt pour détailler ce travail, dont un compte-rendu sera d'abord diffusé via l'INRP, mais nous envisageons de pouvoir le partager avec vous à partir de la prochaine rentrée.

Une rentrée, c'est aussi de nouveaux dispositifs qu'il faut prendre en compte :
a) la généralisation de l'expérimentation d'une épreuve pratique en Terminales S. L'équipe IREM a exprimé l'an dernier ses réticences, mais chacun est conscient qu'une telle réforme ne sera que ce que nous en ferons. Depuis plusieurs années, l'équipe collège propose des stages sur l'utilisation des TICE en vue de leur utilisation pertinente pour l'enseignement de concepts et de démarches mathématiques. Il est clair que c'est ainsi que nous pouvons proposer des séances où l'élève apprend non seulement à se servir des outils (calculette ou logiciels) mais surtout à progresser dans sa compréhension de notre discipline. Vaste programme.
b) le socle commun et les différents outils d'accompagnement, aide en 6ème, soutien, PPRE, demandent également une véritable intelligence pour une mise en place où chaque élève trouve son compte.
c) l'irruption de l'évaluation par compétences dans la correction du brevet et du baccalauréat suscite aussi de nombreuses interrogations…

Sur chacune de ces questions l'équipe IREM travaille et tente d'apporter des réponses, en vue notamment des stages de formation continue. Mais, bien entendu, elle ne peut le faire seule. Chacun est directement concerné.

Un autre bouleversement marque la formation des stagiaires IUFM : non seulement ceux-ci ont huit heures d'enseignement au lieu de six à accomplir, mais le dispositif d'encadrement est devenu complexe, avec quelques séances en grand groupe, et d'autres en petits groupes éclatés sur l'Académie.

Mais la rentrée c'est aussi le partage de ce qui a été vécu pendant l'été : université d'été sur l'expérimentation en mathématiques, école d'été de didactique, université d'été sur l'épistémologie des mathématiques à Prague… Expériences diverses qui enrichissent l'ensemble de l'équipe IREM.

Enfin, chaque rentrée voit un renouvellement des équipes.
À l'IREM, c'est surtout perceptible au niveau du groupe collège, mais des évolutions de l'équipe lycée se préparent.
Ce même vendredi 14 septembre, nous avons pu exprimer, avec quelques membres du bureau de la Régionale APMEP, toute notre reconnaissance à Louis-Marie Bonneval, qui, pour cause de retraite ne faisait pas sa rentrée. Nous avons pu le remercier pour sa compétence et sa gentillesse, sa grande culture et sa discrétion, et pour tout le travail accompli.
Bien entendu, nous le reverrons, puisqu'il prépare avec ardeur les prochaines Journées Nationales de La Rochelle. Cet événement phare va également être un moteur puissant pour tout le travail de cette année…
Bonne année scolaire à chacun.

Jean Souville – Directeur de l'IREM de Poitiers

Rallye Mathématique Poitou-Charentes

Retenez déjà la date du mardi 4 mars 2008 ; ce sera le jour de l'épreuve du rallye.
Comme l'an dernier, le rallye sera proposé aux classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème de collège, et aux classes de 2nde de lycée. Si l'épreuve est toujours d'une heure pour les classes de collège, elle repasse à deux heures pour les classes de Seconde comme l'ont souhaité de nombreux professeurs.
Tous les collèges et lycées publics et privés recevront un courrier début décembre qui précisera la date limite d'inscription au rallye et qui proposera une épreuve d'entraînement plus conforme à l'épreuve finale que l'an dernier. Contrairement à l'épreuve de l'an dernier, il n'y aura pas de problèmes communs à deux niveaux, sauf éventuellement entre les 3ème et les 2nde, ceci pour faciliter l'organisation des épreuves dans les collèges qui inscrivent des classes sur les quatre niveaux.
L'épreuve d'entraînement et l'épreuve finale 2007 sont téléchargeables sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes. Vous pouvez déjà les utiliser pour faire connaître le rallye à vos élèves. Soyez nombreux à inscrire vos classes.

L'équipe organisatrice du rallye

Perles dans nos copies

Répondez à chaque question en faisant une phrase

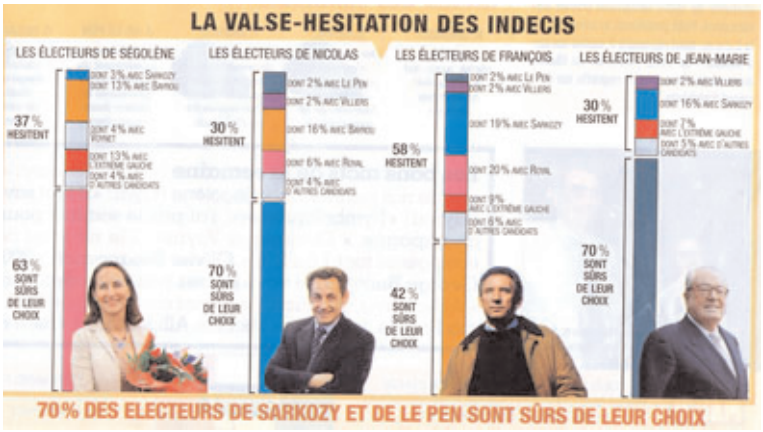
Répartition par sexe et par tranche d'âge des habitants d'une commune :

âge \ sexe	Féminin	Masculin	Total
0 - 19	120	96	216
20 - 35	90	104	194
36 - 55	112	92	204
Plus de 55	96	89	185
Total	418	381	799

1 - Combien y a-t-il de jeunes filles âgées de moins de vingt ans ?

Dans cette classe il y a 96 fille de sexe masculin

Billet d'humeur !



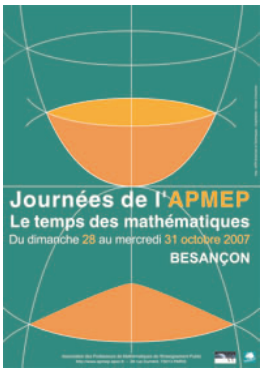
Extrait d'un hebdomadaire à grand tirage (Paris Match du 5 avril 2007). Il ne s'agit pas de prendre parti (politique !) ; cependant en examinant attentivement les graphiques, on peut remarquer que parfois 2% valent 4%, mais aussi que 70% ne vaut pas toujours 70% et même que 37% est plus petit que 30%.
Comment s'étonner que nos élèves fassent des erreurs dans les pourcentages et les graphiques !!

Jean-Marie Parnaudeau

« Manque de rigueur », « soyez plus rigoureux »… Combien de fois l'avons-nous écrit sur des copies. Avons-nous écrit, ne serait-ce qu'une fois : « démonstration trop rigoureuse ! ». Un mathématicien du XXe siècle disait en substance :
« Il n'y a pas, à proprement parler de définition rigoureuse de la rigueur ; la rigueur se reconnaît par son manque ». Qu'en est-il dans la vie dite « courante » ? Examinez attentivement l'extrait de publicité ci-dessus.

Jean-Marie Parnaudeau

Journées Nationales de l'APMEP
BESANÇON
du 28 au 31 octobre 2007.



Le temps des mathématiques
Les mathématiques dans leur temps

Inscriptions sur le site des Journées : http://ctug48.univ-fcomte.fr/APMEP2007/

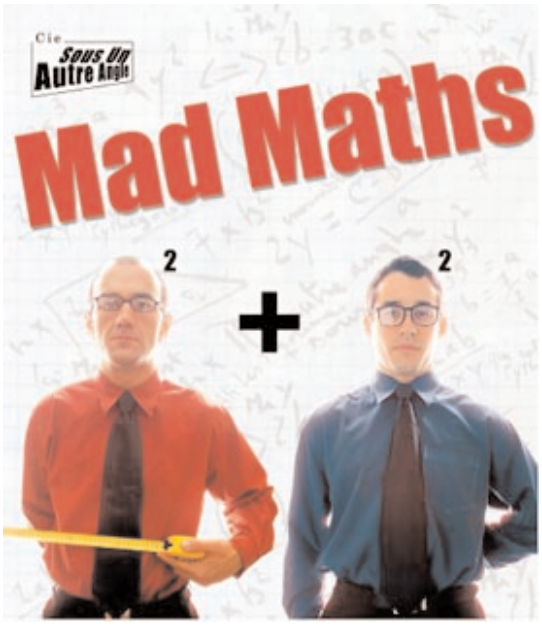
La compagnie
Sous un autre Angle
présente :

Mad Maths

Conférence loufoque et poétique
tout public
autour des mathématiques

Vendredi 19 et samedi 20 octobre à 21h07
Dimanche 21 octobre à 16h07
A La Rochelle, à L'Azile
29 rue Debussy

Tangente : *« Une pièce originale, intelligente… et drôle par-dessus le marché dont on sort convaincu qu'on peut rire avec les maths »*



« Mad Maths », spectacle décalé et loufoque, se présente sous la forme d'un cours mené par deux professeurs doux - dingues qui, poussant à l'extrême les mathématiques, en font naître l'absurde, l'humour, la poésie.
Pour être allé voir le spectacle en 2005 au théâtre le Funambule à Paris, je peux vous assurer que vous ne serez pas déçus. Il faut tout de même connaître un peu de mathématiques pour savourer tout l'humour de la pièce !

J. F.

Conférences d'Ahmed Djebbar

Ahmed Djebbar, professeur à l'université des sciences et des technologies de Lilles, est un habitué de notre Régionale. Il était venu à Poitiers le 18 janvier 2006 faire une conférence sur les sciences arabes dans le cadre des « Amphis du savoir » organisés par l'Espace Mendès - France ; il nous a invités et fait visiter l'exposition « *L'âge d'or des sciences arabes* » à l'Institut du Monde Arabe à Paris le 18 mars et est venu à Niort pour une nouvelle conférence en avril 2006.
Voici ses diverses interventions dans notre Académie pour ce dernier trimestre de l'année 2007, conférences organisées par l'Espace Mendès - France en partenariat avec des associations locales :

ESPACE MENDES FRANCE

* À **Poitiers** : *Les sciences arabes en Méditerranée*,
le 5 octobre 2007 à 20 h, à la Maison des Jeunes et de la Culture Aliénor d'Aquitaine, quartier des Couronneries, au 37 rue Pierre de Coubertin, salle de conférence 1er étage.

* À **Soyaux** : *Les sciences arabes entre l'héritage gréco-indien et la réception européenne (IX^{ème} – XV^{ème} siècles)*,
le 8 octobre 2007 à 20 h 30, à l'Espace Matisse

* À **Saint-Jean de Thouars** : *Naissance, développement et circulation des sciences arabes (IX^{ème} – XV^{ème} siècles)*,
le 13 décembre 2007 à 14 h 30, à la Maison du Temps Libre

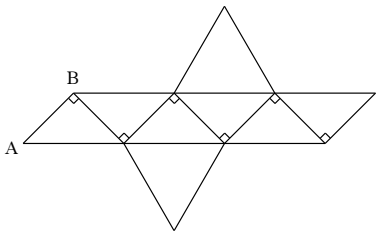
RU-BRI-COLVAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

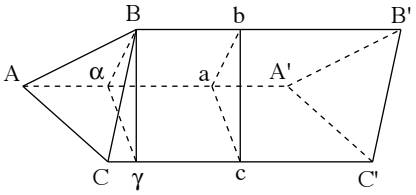
Des problèmes

70-1 *transmis par Jean-Paul Guichard d'après Math-Jeunes septembre 2006* :



Pour lancer sa nouvelle marque de jus d'orange, un fabriquant souhaite utiliser une nouvelle forme d'emballage dont voici ci-contre un patron.
Quelle doit être au mm près la longueur AB pour que le volume de ce nouveau conditionnement soit d'un demi-litre ?

70-2 *de Serge Parpay (Niort)* :



a) Soit un prisme droit ABCA'B'C'. On veut couper ce prisme par une section droite abc en deux prismes de même volume. *h* étant la hauteur du prisme, quelle sera la distance entre les plans ABC et abc ?
b) Soit un prisme oblique ABCA'B'C'. On veut couper ce prisme par une section droite abc en deux prismes de même volume. αBγ étant une section droite du prisme, CC' = *h*, Aα = *k*, Cγ = *l*, quelle sera la distance entre les plans αBγ et abc ?
On établira une condition sur *h*, *k* et *l* pour que la section droite abc soit effectivement réalisable.

70-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

Une affirmation de Jean Dhombres, dans son article : « *L'avenir de l'enseignement des mathématiques n'est pas un long fleuve tranquille* » paru dans le Bulletin Vert n° 471, placée au bas de la page 479, et à laquelle je vous renvoie, me suggère l'énoncé suivant :

Peut-on exhiber une fonction *f*, infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, qui ne soit pas de la forme $x \mapsto Ye^{kx}$ (*Y* et *k* réels) et vérifiant pourtant la relation de demi-vie, à savoir $f(x + x_{DV}) = f(x) / 2$?

Des solutions

65-2 *de Léa Broutille :*
Soit deux droites d et d' perpendiculaires, O leur point d'intersection, δ et δ' les bissectrices des angles formés par ces deux droites. Un cercle Γ passant par O coupe d en A, d' en B, δ en C et δ' en D. Montrer que le quadrilatère ACBD est un carré.
Montrer que tout carré ACBD peut être « placé » sur les quatre droites, A sur d, C sur δ, B sur d', D sur δ'.

Solution de Frédéric de Ligt :

Si l'une des quatre droites est tangente au cercle, il est clair que ACBD est un carré. Sinon O est distinct de A, B, C et D. Il est alors possible de considérer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$. Ils sont droits d'après l'énoncé. [AB] et [CD] sont donc deux diamètres du cercle. Le quadrilatère ACBD est un rectangle. Notons I le centre du cercle ; puisque $\widehat{AOD}$ mesure 45°, l'angle au centre $\widehat{AID}$ est droit. ACBD est finalement un carré. Précisons la seconde question : un carré peut-il être translaté de façon à amener ses quatre sommets sur d, δ, d' et δ' ? Si les côtés du carré sont parallèles à d et d' ou bien à δ et δ', une translation qui amène un des sommets en O convient. Dans le cas contraire, traçons un segment [A'B'] parallèle à une diagonale du carré et de même longueur, avec A' sur d. Traçons ensuite une parallèle à d qui passe par B', elle recoupe d' en un point B. La parallèle à [A'B'] passant par B recoupe d en un point A. Le segment [AB] est une des diagonales du carré cherché. La fin de la construction est alors aisée.

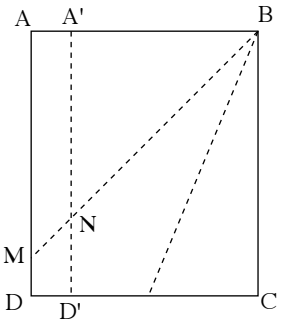
66-3 *de Jean-Christophe Laugier :*
Soit *n* un entier ≥ 1 ; combien y a-t-il de partitions de *n* dont les sommants sont tous égaux ou prennent deux valeurs distinctes consécutives ? Par exemple pour *n* = 4, il y a quatre partitions possibles : 4, 2 + 2, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1.

Solution de Jean-Christophe Laugier :

Une partition de n répondant à la condition de l'énoncé peut s'écrire :
$n = (q + ... + q) + ((q + 1) + ... (q + 1))$ avec $q \geq 1$, le nombre de sommants égaux à *q* étant ≥ 1 et celui des sommants égaux à *q* + 1 étant ≥ 0. Le nombre de partitions cherché est donc égal à card(A), A étant l'ensemble des triplets d'entiers (*k*, *q*, *r*) tels que : $n = kq + r(q + 1)$ avec $q, k \geq 1$, $r \geq 0$; soit $n = (k + r)q + r = aq + r$ en posant $a = k + r$.

L'application $(k, q, r) \rightarrow (k, a, r)$ définit une bijection de A sur l'ensemble des triplets d'entiers (k, a, r) tels que $n = aq + r$ avec $q \geq 1$ et $0 \leq r < a$.
q et r sont donc respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par a.
Il sont donc déterminés de manière unique par a. Puisque a peut prendre toutes les valeurs de 1 à n, il y a donc n partitions répondant à la question.

67-3 *extrait du livre « Le fabuleux destin de* $\sqrt{2}$ *» par Benoît Rittaud (éditions Le Pommier, 2006, p.293)* :



Soit ABCD un rectangle initial quelconque. Amenons par pliage le côté [AB] sur le côté [BC], puis déplions : le segment qui marque le pli est noté [BM]. Plions ensuite le côté [BC] sur le segment [BM], ce qui amène le point C en un point noté N, puis déplions à nouveau. La parallèle au côté [AD] passant par N (qui se construit elle aussi par pliage) coupe les côtés [AB] et [CD] respectivement en A' et D', et le rectangle A'BCD' est un rectangle dont le rapport longueur/largeur est de $\sqrt{2}$. *À prouver !*

Solution de Frédéric de Ligt :

Remarquons tout d'abord que le rectangle ne peut être quelconque comme annoncé. Pour que N reste dans le rectangle initial, il faut que ses dimensions vérifient longueur/largeur $< \sqrt{2}$.
Notons M' (resp N') la projection orthogonale de M (resp N) sur [BC]. ABM'M et A'BN'N sont alors des carrés.

Finalement, BC = BN = $\sqrt{2}$ A'B. Dans le cas où longueur/largeur $> \sqrt{2}$, il faut au contraire plier [BM] sur le côté [BC], ce qui amène M en N et il faut alors plier selon la parallèle à [AB] passant par N.

68-4 *de Jacques Chayé :*

Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle et soit S = $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$. Démontrer que $\frac{3}{2} \leq S \leq 2$.

Solution de Jacques Chayé :

Supposons par exemple que $a \leq b \leq c$.
1°) Démontrons la seconde inégalité. On a : $b + c \geq a + b$ et $a + c \geq a + b$.

Par conséquent : $S \leq \frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}+\frac{c}{a+b}=1+\frac{c}{a+b}$. D'après l'inégalité triangulaire, $\frac{c}{a+b} \leq 1$. Conclusion $S \leq 2$.
2°) Essayons une méthode analogue pour la première inégalité. On a : $a + c \leq b + c$ et $a + b \leq b + c$.

Par conséquent : $S \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}=\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}=\frac{a}{b+c}+1$. Mais $\frac{a}{b+c}$ n'est pas nécessairement supérieur à 1/2. On ne peut donc pas conclure de cette manière. Si l'on transforme S en mettant les 3 rapports au même dénominateur et en faisant la somme, on obtient $S=\frac{a(c+a)(a+b)+b(a+b)(b+c)+c(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{a^3+b^3+c^3+3abc+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+ca^2+c^2a}{2abc+a^2b+ab^2+bc^2+b^2c+ca^2+c^2a}=\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+1$

Il reste à démontrer que dans tout triangle : $\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1}{2}$.

Si $c = 1$, on a affaire à une famille particulière de triangles, mais tous les autres triangles se déduisent de ceux-ci par homothétie ; les sommes S relatives à deux triangles homothétiques sont égales. Nous supposons donc désormais que $c = 1$; on a donc : $a \leq b \leq 1$ (cf. *Remarque 1* plus loin) et $S = \frac{a^3+b^3+1+ab}{(a+b)(b+1)(1+a)}+1$. Posons $h = a - 1$, $k = b - 1$ (pourquoi particulariser le couple $(1 ; 1)$? cf. *Remarque 2* plus loin). Démontrons que le rapport $S' = \frac{a^3+b^3+1+ab}{(a+b)(b+1)(1+a)}$ est supérieur à 1/2.

On a $S' \leq \frac{(h+1)^3+(k+1)^3+(h+1)(k+1)+1}{(h+k+2)(h+2)(k+2)}$. Considérons le numérateur N et le dénominateur D de ce rapport :

$N = h^3 + 3h^2 + 3h + 1 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + hk + h + k + 1 + 1 = h^3 + k^3 + 3h^2 + 3k^2 + 4h + 4k + hk + 4$
$D = (h + k + 2)(hk + 2h + 2k + 4) = h^2k + hk^2 + 2h^2 + 2k^2 + 6hk + 8h + 8k + 8$
Il s'agit de comparer $2N = 2h^3 + 2k^3 + 6h^2 + 6k^2 + 8h + 8k + 2hk + 8$ et $D = h^2k + hk^2 + 2h^2 + 2k^2 + 6hk + 8h + 8k + 8$ ou encore $2h^3 + 2k^3 + 4h^2 + 4k^2$ et $h^2k + hk^2 + 4hk = hk(h + k + 4)$. Puisque $0 \leq a \leq b \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq h + 1 \leq k + 1 \leq 1$ ou encore $-1 \leq h \leq k \leq 0$. On en déduit $2h^3 \geq -2$; $2k^3 \geq -2$; $4h^2 \geq 4$; $4k^2 \geq 4$. D'où $2h^3 + 2k^3 + 4h^2 + 4k^2 \geq 4$ (1).
On en déduit aussi $0 \leq hk \leq 1$ et $-2 \leq h + k \leq 0$ donc $2 \leq h + k + 4 \leq 4$ et par conséquent $0 \leq hk(h + k + 4) \leq 4$ (2). De (1) et (2) on tire $2h^3 + 2k^3 + 4h^2 + 4k^2 \geq hk(h + k + 4)$ ce qui prouve que $2N \geq D$, ou encore, puisque N et D sont positifs, que $2S' \geq 1$.
Conclusion $S \geq 3 / 2$.
Remarque 1. Pour obtenir un triangle satisfaisant à la double inégalité $a \leq b \leq 1$, il suffit de tracer un segment $[AB]$ tel que $AB = 1$, la médiatrice Δ de $[AB]$, l'arc de cercle Γ de centre A, passant par B et dont les extrémités sont sur Δ. Tout point C com-

pris entre Δ et Γ déterminera un triangle convenable.

Remarque 2. Soit *f* la fonction de deux variables : $(x\,;y) \mapsto \frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{1}{x+y}$ de $\mathbb{R}^{+2}$ vers $\mathbb{R}$.

Les dérivées partielles sont $f'_x(x\,;y) = \frac{1}{y+1}-\frac{y}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}$ et $f'_y(x\,;y) = -\frac{x}{(y+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+y)^2}$.

Recherchons les points critiques (annulant les deux dérivées partielles).

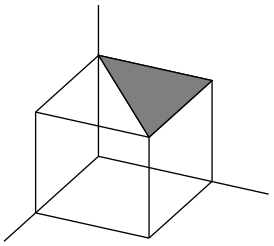
1°) Si les dérivées sont égales, alors : $\frac{1}{y+1}-\frac{y}{(x+1)^2} = -\frac{x}{(y+1)^2}+\frac{1}{x+1}$ d'où $(y+1)^2 = (x+1)^2$, comme x et y sont positifs, $x = y$.

Si, en outre, ces dérivées sont nulles, on a : $\frac{1}{x+1}-\frac{x}{(x+1)^2}-\frac{1}{4x^2} = 0$ c'est-à-dire $\frac{x+1-x}{(x+1)^2}-\frac{1}{4x^2} = 0$ soit encore $\frac{4x^2-(x+1)^2}{(x+1)^2 4x^2} = 0$.

Il s'ensuit : $(x-1)(3x+1) = 0$ c'est-à-dire $x = 1$ et alors $y = 1$.

2°) Réciproquement, on a bien : $f'_x(1\,;1) = 1/2 - 1/4 - 1/4 = 0$ et $f'_y(1\,;1) = -1/4 + 1/2 - 1/4 = 0$.

Conclusion : le point $(1\,;1)$ est le seul point critique.



Remarque 3. Les triplets $(a\,;b\,;c)$ de $\mathbb{R}^3$ qui ont été envisagés dans la démonstration de l'encadrement de *S* satisfaisaient aux conditions : $c = 1$ et $0 < a \le b \le 1$. Ils sont représentés ci-contre par le triangle grisé.

Voici une autre démonstration possible de la seconde inégalité n'utilisant que des outils du niveau lycée :

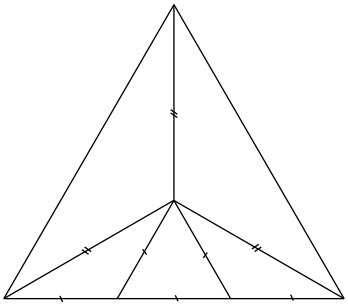
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{a+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)+(a-c)}{b+c}+\frac{(b-a)+(b-c)}{a+c}+\frac{(c-a)+(c-b)}{a+b} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\left(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}\right)+(c-b)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}\right)+(c-a)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(c-b)^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} \ge 0$$

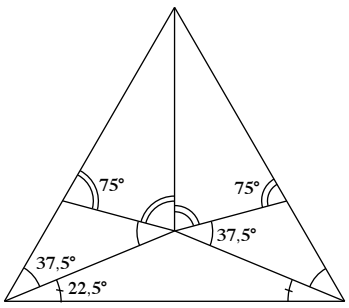
Mais cette dernière inégalité est vraie avec égalité quand $a = b = c$. F. de L.

69-1 *de Jean-Paul Guichard :*
Partager un triangle équilatéral en cinq triangles isocèles.

Solution de Marc Le Metayer :

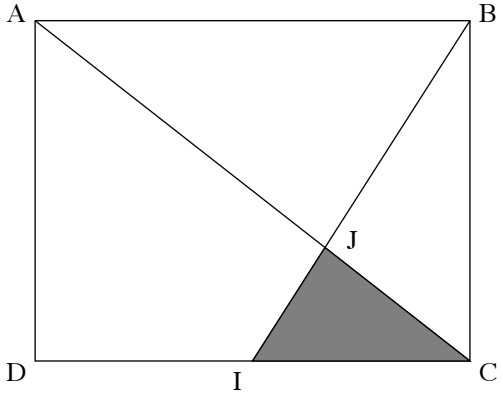


Solution de Frédéric de Ligt :



Défi collège

Cette rubrique veut proposer des petits problèmes qui peuvent être résolus avec les outils disponibles au collège. Corol'aire se fera un plaisir de publier les solutions des élèves, ou encore le compte rendu, par le professeur, de l'activité de la classe qui aura été mise au défi de le résoudre. J. F.

ABCD est un rectangle.
[AC] est une diagonale et I est le milieu de [DC].
(BI) et (AC) se coupent en J.

À quelle fraction de l'aire du rectangle ABCD correspond l'aire du triangle CIJ ?