

**Jean-Christophe Laugier** (Rochefort) nous présente une démonstration issue de la théorie des graphes qui l'a particulièrement impressionné :

Il arrive que l'on ressent un profond sentiment esthétique devant une démonstration mathématique ingénieuse. J'en veux pour preuve une démonstration d'un fascinant énoncé dû à Ramsey que l'on peut énoncer sous la forme : *P étant une population infinie d'individus, il est toujours possible d'extraire de P une infinité d'individus qui se connaissent mutuellement ou sont tous mutuellement étrangers.*

Pour l'anecdote, Paul Erdős a posé ce problème à Louis Posa, alors âgé de 13 ans. Celui-ci mit 15 minutes à saisir l'énoncé. Rentré chez lui, il y réfléchit toute la soirée et, avant d'aller se coucher, il en avait trouvé une démonstration. Je tiens ces renseignements de l'admirable livre de Ross Honsberger « Joyaux Mathématiques ». Ross Honsberger livre l'idée de la démonstration du théorème de Ramsey, que j'ai rédigée et que je joins. Je ne résiste pas à l'envie de faire partager aux lecteurs de COROL'AIRE le plaisir que j'ai ressenti.

*Démonstration du théorème de Ramsey :*

La démonstration du théorème de Ramsey repose sur la construction d'un sous-ensemble  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  infini dénombrable de  $P$  possédant la propriété remarquable suivante : *pour tout  $i \geq 1$ ,  $x_i$  connaît tous les  $x_j$  tels que  $j > i$  ou  $x_i$  ne connaît aucun des  $x_j$  tels que  $j > i$ .*

$X$  étant construit, les deux sous-ensembles  $Y$  et  $Z$  :

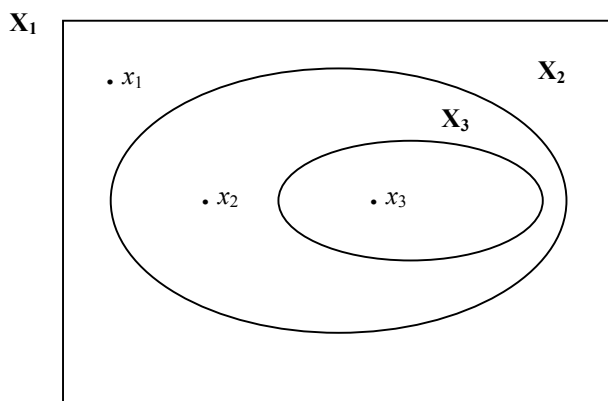
$Y = \{x_i \in X / x_i \text{ connaît } x_j \text{ pour tout } j > i\}$ ,  $Z = \{x_i \in X / x_i \text{ ne connaît pas } x_j \text{ pour tout } j > i\}$  constituent donc une partition de  $X$ .

Puisque  $X$  est infini, l'un des deux sous-ensembles  $Y$  et  $Z$  est infini et fournit l'ensemble infini cherché de personnes se connaissant mutuellement ou mutuellement étrangères. Il s'agit à présent de construire l'ensemble  $X$ . Introduisons tout d'abord les définitions suivantes :

Si  $A$  est une partie de  $P$  et si  $a \in P - A$ , on dit que  $a$  connaît (resp. est étranger à)  $A$  si  $a$  connaît (resp. est étranger à) tout individu de  $A$ .

La construction de  $X$ , comme on va le voir, repose sur l'application répétée du lemme suivant facile à établir : *Si  $A$  est une partie infinie de  $P$  et si  $a \in A$ , il existe une partie infinie  $A'$  de  $A - \{a\}$  telle que  $a$  connaît  $A'$  ou est étranger à  $A'$ .*

Par application du lemme, on construit aisément par récurrence une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $P$  et une suite  $(X_n)$  de parties infinies de  $P$  vérifiant :  $X_1 = P$  ; pour tout  $n \geq 1$ ,  $x_n \in X_n$ ,  $X_{n+1} \subset X_n - \{x_n\}$ ,  $x_n$  connaît  $X_{n+1}$  ou est étranger à  $X_{n+1}$ . Il résulte de la construction précédente que  $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \subset X_{n+1}$  et par suite  $x_n$  connaît  $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$  ou est étranger à  $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ . On a bien obtenu l'ensemble  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  cherché.



Quant à **Marc Blanchard** (Rochefort), il nous propose une curiosité géométrique :

Dans un plan, soit  $G$  le barycentre de 3 points massifs donnés  $(A, a)$ ,  $(B, b)$ ,  $(C, c)$  non alignés tels que  $a + b + c = 1$  et  $abc \neq 0$ .

Considérons  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  tels que  $\vec{B'C'} = a\vec{GA}$ ,  $\vec{C'A'} = b\vec{GB}$ ,  $\vec{A'B'} = c\vec{GC}$  (c'est licite car  $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$ ).

Nommons  $G'$  le barycentre de  $(A', a)$ ,  $(B', b)$ ,  $(C', c)$ . Alors :  $a\vec{G'A'} + b\vec{G'B'} + c\vec{G'C'} = \vec{0}$ ,

donc  $\vec{A'G'} = b\vec{A'B'} + c\vec{A'C'} = bc(\vec{GC} - \vec{GB}) = bc\vec{BC}$ . De même  $\vec{B'G'} = ca\vec{CA}$  et  $\vec{C'G'} = ab\vec{AB}$ . On en déduit les parallélismes :  $(A'G') \parallel (BC)$ ,  $(B'G') \parallel (CA)$ ,  $(C'G') \parallel (AB)$  et une construction aisée de  $G'$ . En itérant le processus, on obtient un triangle  $A''B''C''$  homothétique du triangle initial  $ABC$  dans le rapport  $-abc$ . Ce résultat ne se généralise pas à plus de 3 points et n'a pas de sens pour deux seuls points. On comprend donc qu'il ne soit guère connu car relève plus de la curiosité que de l'intérêt !

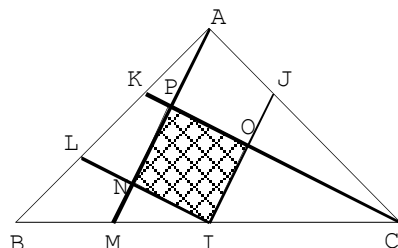
## Des problèmes

**69-1 de Jean-Paul Guichard (Parthenay) :**

Partager un triangle équilatéral en cinq triangles isocèles.

**69-2 de Gilles Auriault (Oslo) :**

ABC est un triangle rectangle-isocèle en A. K et J sont au tiers des longueurs des côtés respectifs [AB] et [AC] à partir de A. L est le milieu de [KB], I est le milieu de [BC] et M est le milieu de [BI]. Démontrer que INPO est un carré (autre question qui présente moins d'intérêt : calculer l'aire de INPO en fonction de celle de ABC).



**69-3 de Frédéric de Ligt (Montguyon) :**

Quelle(s) valeur(s) faut-il donner aux réels  $p$  et  $q$  pour que le graphe de la fonction  $f$ , définie sur  $[-1 ; 1]$  par  $f(x) = x^2 + px + q$ , s'écarte le moins possible de l'axe des abscisses ?

## Des solutions

**65-1 de Louis Rivoallan (Rochefort) :**

Ce fut comme un éclair. Si un tétraèdre est régulier, ses quatre faces ont la même aire. Evident ! Mais la réciproque ne serait-elle pas vraie elle aussi ? Tout en marchant vers le lycée, je me promets d'y réfléchir. C'est tout bête un tétraèdre, mais c'est quand même plus compliqué que cela n'y paraît. Et mon problème me semble bien plus compliqué que ce que je pensais.

Au lycée, je croise Jean-Christophe Laugier, un spécialiste de la rubrique. Bien évidemment, je lui soumetts mon petit problème. Le lendemain, dans mon casier, je pouvais lire un contre exemple, signé Jean-Christophe.

Sauriez vous aussi mettre à plat cette conjecture ?

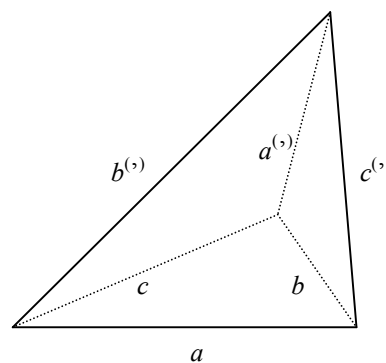
Deux jours après, Jean-Christophe m'avait photocopié un document fort intéressant sur le tétraèdre. Si on y trouvait des résultats assez difficiles à démontrer (du moins pour moi), il y avait également un "petit bijou", c'est-à-dire un résultat assez facile à obtenir et assez méconnu (en tout cas par moi !), qui peut être posé en classe de troisième ou de seconde. Sauriez vous démontrer qu'un tétraèdre a ses arêtes opposées de même longueur si et seulement si les quatre faces ont le même périmètre ? Que peut-on dire alors des quatre faces de ce tétraèdre ?

**Solution de Frédéric de Ligt :**

Il suffit de prendre des valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  différentes avec le tétraèdre ci-contre pour mettre à plat la première conjecture. On part du même solide pour voir que le sens direct de la seconde affirmation est immédiatement prouvé.

Il reste à montrer que si les périmètres des quatre faces d'un tétraèdre sont égaux alors les arêtes opposées de celui-ci sont de même longueur. Chaque arête d'un tétraèdre participe à deux faces. Soit  $p$  le périmètre commun à ces quatre faces et  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  les différentes longueurs des arêtes qui peuvent apparaître.

On a  $a + b + c = a + b' + c' = a' + b' + c = a' + b + c' = p$  ; en additionnant on obtient  $2a + 2b + 2c + 2a' + 2b' + 2c' = 4p$ , d'où  $a' + b' + c' = p$ . Associé à l'égalité  $a + b' + c' = p$ , on aboutit à  $a = a'$ . On montre de même que  $b = b'$  et  $c = c'$ . Les quatre faces triangulaires sont nécessairement isométriques.



**66-2 (de Jean-Christophe Laugier) :**

$n$  joueurs ( $n \geq 2$ ) se sont affrontés deux à deux au cours d'un tournoi. Il n'y a pas eu de match nul. Montrer que l'on peut ranger les joueurs en une suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  telle que pour tout  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , le joueur  $x_i$  a battu le joueur  $x_{i+1}$ .

**Solution de l'auteur :**

Notons  $x \succ y$  la relation «  $x$  a battu  $y$  ». Démontrons l'énoncé par récurrence sur  $n$ . Il est évidemment vrai pour  $n = 2$ .

Supposons-le établi jusqu'à l'ordre  $n$  ( $n > 1$ ). Soit donc un tournoi de  $n + 1$  joueurs numérotés  $1, 2, \dots, n + 1$ . Considérons le joueur  $n + 1$ . S'il a battu tous les autres, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut ranger les joueurs  $1, 2, \dots, n$  en une suite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  telle que  $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$  ; on a alors  $n + 1 \succ x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n$ . De même, s'il a été battu par tous les autres, on a

$x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_n \succ n+1$ . Si enfin le joueur  $n+1$  a été battu par  $k$  joueurs et en a battu  $n-k$  autres ( $1 \leq k \leq n-1$ ), on peut ranger d'après l'hypothèse de récurrence les  $k$  joueurs ayant battu  $n+1$  en une suite  $x_1, x_2, \dots, x_k$  telle que  $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_k$  et les  $n-k$  autres en une suite  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  telle que  $x_{k+1} \succ x_{k+2} \succ \dots \succ x_n$  ;

on a alors  $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_k \succ n+1 \succ x_{k+1} \succ x_{k+2} \succ \dots \succ x_n$  et ceci achève la démonstration.

#### **Autre solution de Frédéric de Ligat :**

Pour  $n = 2$  la propriété est claire. Prenons alors  $n > 2$ . On raisonne par l'absurde. Supposons que l'on puisse établir un classement  $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_k$  d'au maximum  $k$  joueurs, avec  $2 \leq k < n$ . Il y a donc au moins un joueur distinct des  $k$  joueurs précédents. Notons-le  $a$ . On ne peut avoir  $a \succ x_1$  car alors  $a \succ x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_k$ , et on pourrait classer  $k+1$  joueurs. On a donc  $x_1 \succ a$ . Mais on ne peut avoir  $a \succ x_2$  car on aurait un classement de  $k+1$  joueurs :  $x_1 \succ a \succ x_2 \succ \dots \succ x_k$ . Donc  $x_1 \succ x_2 \succ a$  et on continue le même raisonnement avec  $x_3$  et ainsi de suite. Finalement on obtient nécessairement  $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_k \succ a$  qui est aussi un classement de  $k+1$  joueurs. Contradiction.

A noter que cette propriété a été établie par le mathématicien hongrois Laszlo Rédei en 1934.

#### **67-2 (de Frédéric de Ligat) :**

On a l'identité  $(n+2)n+1 = (n+1)^2$  ; cela suggère l'idée de s'intéresser aux suites  $(a_n)$  qui vérifient  $a_{n+2}a_n + 1 = a_{n+1}^2$ . En particulier, pourriez-vous montrer qu'à partir de  $a_1 = 1$  et de  $a_2 = m$  avec  $m$  entier supérieur à 1, la suite  $(a_n)$  ne produit que des entiers naturels ?

#### **Solution de l'auteur :**

On suppose que  $m$  est un entier plus grand que 1. On considère la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  définie par  $v_{n+2} = mv_{n+1} - v_n$  avec  $v_0 = 0$  et  $v_1 = 1$ . On observe que  $v_2 = m$ . Il va s'agir de prouver que les suites  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(a_n)_{n \geq 1}$  coïncident. On s'intéresse pour cela à la

matrice  $Q_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} & -v_{n+1} \\ v_{n+1} & -v_n \end{pmatrix}$ , qui se particularise en  $Q_0 = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\det(Q_0) = 1$ . Un raisonnement par récurrence

permet de montrer que  $Q_n = Q_0^{n+1}$  :

La relation est vraie au rang 0. Soit  $n$  un entier positif, supposons que  $Q_n = Q_0^{n+1}$ .

On a alors  $Q_0^{n+2} = Q_0^{n+1}Q_0 = Q_nQ_0 = \begin{pmatrix} v_{n+2} & -v_{n+1} \\ v_{n+1} & -v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv_{n+2} - v_{n+1} & -v_{n+2} \\ mv_{n+1} - v_n & -v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{n+3} & -v_{n+2} \\ v_{n+2} & -v_{n+1} \end{pmatrix} = Q_{n+1}$ .

En utilisant la propriété des déterminants :  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ , on a donc  $\det(Q_n) = \det(Q_0^{n+1}) = \det(Q_0)^{n+1} = 1$ .

Par conséquent  $\det(Q_n) = -v_{n+2}v_n + v_{n+1}^2 = 1$ . Les suites  $(v_n)_{n \geq 1}$  et  $(a_n)_{n \geq 1}$  sont donc égales terme à terme. Par ailleurs, il est clair, en observant la relation de récurrence entre les termes de la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  et ses deux premiers termes, que tous les termes de cette suite sont des entiers. On peut même assurer que ce sont des entiers naturels. Pour cela prouvons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} > v_n \geq 0$ . Quand  $n = 0$ , on a bien  $v_2 > v_1 \geq 0$ . Soit  $n$  un entier naturel, supposons que

$v_{n+1} > v_n \geq 0$ , on a alors  $v_{n+2} - v_{n+1} = (m-1)v_{n+1} - v_n \geq v_{n+1} - v_n > 0$ . La suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est donc bien constituée d'entiers naturels dès que  $m$  est un entier supérieur à 1.

Pour  $m = 2$ , cette suite fournit les entiers naturels non nuls.

Pour  $m = 3$ , elle fait apparaître les termes de rang pair de la suite de Fibonacci définie par  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  avec  $F_1 = F_2 = 1$ , c'est-à-dire que  $a_n = F_{2n}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul. En effet, on a tout d'abord  $a_1 = F_2 = 1$ ,  $a_2 = F_4 = 3$  et, en partant de  $F_{2n+4} = F_{2n+3} + F_{2n+2}$  ;  $F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$  ;  $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$ , on tire  $F_{2n+4} - F_{2n+2} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$  puis  $F_{2n+4} - 2F_{2n+2} = F_{2n+2} - F_{2n}$  et enfin  $F_{2n+4} = 3F_{2n+2} - F_{2n}$ .

#### **68-2 (de Louis Rivoallan) :**

Voici un petit exercice de niveau Troisième, Seconde. ABCD est un trapèze rectangle en A et D. On veut tracer le point G sur (AD) tel que BG = GC. Bien sûr, vous avez tout de suite pensé à prendre l'intersection de la médiatrice de [BC] avec la droite (AD). Mais voici ce qu'a imaginé un élève. Il trace B' et C' symétriques de B et C par rapport à (AD), puis il trace les médiatrices de [B'C] et de [BC']. Elles se coupent en G affirme-t-il. A-t-il raison ?

#### **Solution de Frédéric de Ligat :**

On note O l'intersection de (AD) avec la médiatrice de [B'C]. On a donc OB' = OC. Par conservation de la distance par symétrie on a aussi OB = OB', d'où OB = OC et donc G = O. De même, si on note O' l'intersection de (AD) avec la médiatrice de [BC'], on a O'B = O'C = O'C', d'où O'B = O'C et on a aussi O' = G. L'affirmation de l'élève est donc légitime.