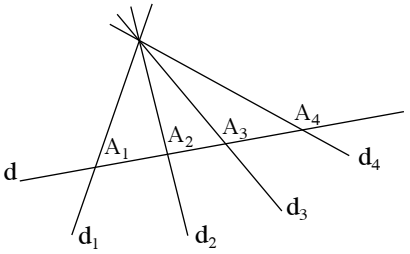
Histoire d'un exercice

Serge PARPAY - Niort

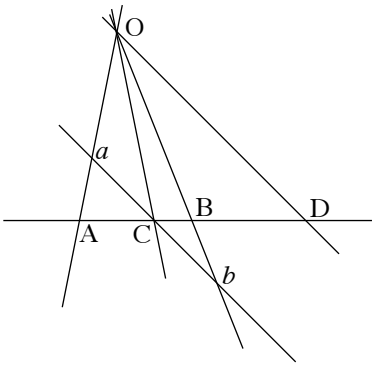
Pour le Rallye Mathématique Poitou-Charentes, nous recherchons des exercices amusants et/ou curieux et si possible relativement neufs. J'en ai « fabriqué » quelques-uns (parfois un peu tordus !). Mais reste la question : quelle est la part de l'imagination et quelle est la part de souvenirs diffus de lectures anciennes ou récentes ?
Un exercice du dernier Rallye (mettant en jeu une pendule) provient d'une idée bizarroïde (« ça va pas la tête ?! ») que je revendique, en tout cas pas d'un bouquin, ou alors dites-moi lequel et merci du renseignement. Au fait, est-ce que l'exercice est drôle ? C'est une autre question ! (voir le texte des épreuves du Rallye dans le dernier Corol'aire).
Voulant faire quelque chose de plus simple, en crayonnant machinalement, j'ai eu l'idée suivante :



Quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 sont concourantes en un point O.
Construire une droite d qui coupe ces quatre droites respectivement en A_1, A_2, A_3 et A_4 de telle sorte que $A_1A_2 = A_3A_4$.
En brodant une petite histoire autour, cela me paraissait bien pour notre Rallye (niveaux Troisième et Seconde).
Bon, alors la construction ? Ben… ben… C'est évident, « y'a une droite, et même un tas de droites, toutes parallèles entre elles »… Ben quoi ?… Coi, le Prof Ila Ransor ; coite, l'aimable Léa Broutille ! Je n'ai pas trouvé la solution tout de suite ; laisser mijoter dans la cervelle… enfin trouvé, par la "vieille géométrie" naturellement, celle dont on dit parfois tant de mal ! Après, mais après seulement, j'ai fait l'exercice par l'analytique : intéressant d'ailleurs !
Une conséquence logique : mes chers collègues sont mis devant le problème. Normal, entre amis tous les coups sont permis. Je dois avouer que je n'ai pas eu le succès attendu. Certains n'ont rien fait, d'autres se sont posé des questions, d'autres on dit avoir cherché, d'autres ont sans doute trouvé depuis. Tous ont demandé, intrigués : « Mais où as-tu pris cet exercice ? » Comment ! mais il est de moi, cet exercice ! Pour une fois une petite gloire : Heureux ! comme aurait dit Fernand Raynaud.
Le problème est donné dans Corol'aire (n° 67 décembre 2006). Des réponses seront-elles proposées ? En tout cas, voilà une construction.

Préliminaires et rappels :

Quatre points A, B, C et D alignés forment une division harmonique si $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.



On écrit par convention (A,B,C,D) = -1.
Trois des quatre points d'une division étant donnés, le quatrième est parfaitement déterminé.

I étant le milieu du segment AB, on a $IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$ *(condition nécessaire et suffisante)*

J étant le milieu du segment CD, on a $JC^2 = JD^2 = \overline{JA} \cdot \overline{JB}$ *(idem).*
(A,B,C,D) étant une division harmonique et O étant un point extérieur à la droite support de la division, les droites (OA), (OB), (OC) et (OD) forment un faisceau harmonique.
On écrit par convention (OA,OB,OC,OD) = - 1.
Une parallèle à un des rayons du faisceau est divisée par les trois autres en deux segments égaux (condition nécessaire et suffisante) ; par exemple, sur la figure ci-contre aC = Cb : pour le démontrer voir les triangles semblables ACa et ADO d'une part, BCb et BDO d'autre part et utiliser $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.
Un faisceau harmonique découpe sur toute droite non parallèle à un des rayons du faisceau une division harmonique (utiliser l'idée précédente).

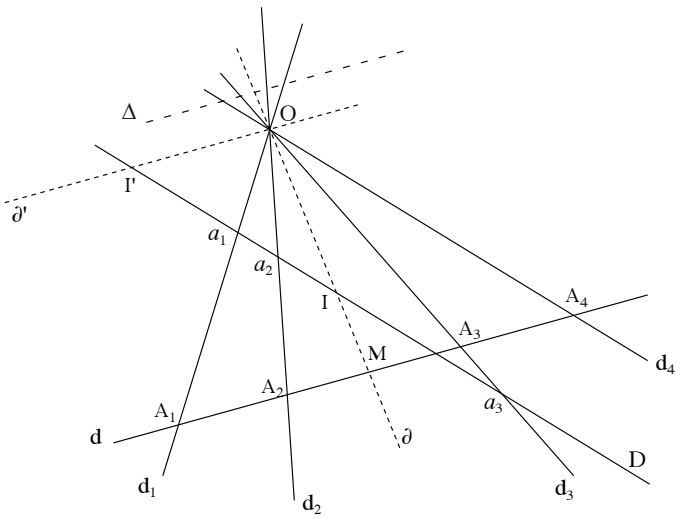


Figure 1

Soit d une droite répondant à la question (remarquons que toute parallèle à d, par exemple Δ, conviendrait également) (figure 1).
$A_1A_2 = A_3A_4$. Les segments A_1A_4 et A_2A_3 ont le même milieu M. Soit ∂ la droite passant par les points O et M et soit ∂' la parallèle à d passant par O.
M étant le milieu de $[A_2A_3]$, $(d_2, d_3, \partial, \partial') = -1$. M étant le

milieu de $[A_1A_4]$, $(d_1, d_4, \partial, \partial') = -1$. Soit alors une droite D parallèle à d_4, coupant ∂ en I, ∂' en I', d_1 en a_1, d_2 en a_2, d_3 en a_3. $(d_1, d_4, \partial, \partial') = -1$ et D parallèle à d_4 : donc a_1 est le milieu du segment [I I'].

$(d_2, d_3, \partial, \partial') = -1$ et a_1 milieu du segment [I I'] : donc $a_1I^2 = a_1I'^2 = \overline{a_1a_2}.\ \overline{a_1a_3}$

Cette relation permet la construction de I et de I', et par suite des droites ∂ et ∂'.

Construction (Figure 2) :
une droite D parallèle à d_4 donne les points a_1, a_2 et a_3 ; on trace un cercle passant par a_2 et a_3, une tangente (a_1T) à ce cercle (on a alors $a_1I^2 = a_1I'^2 = \overline{a_1a_2}.\ \overline{a_1a_3}$) le cercle de centre a_1 et de rayon a_1T coupe la droite D aux points I et I'. On construit les droites (OI) (∂) et (OI') (∂'). Une droite d parallèle à ∂' répondra à la question.

Les deux droites jouent un rôle équivalent dans les faisceaux de droites : de même que toute droite d parallèle à ∂', toute droite d' parallèle à ∂ répond à la question (figure 3).

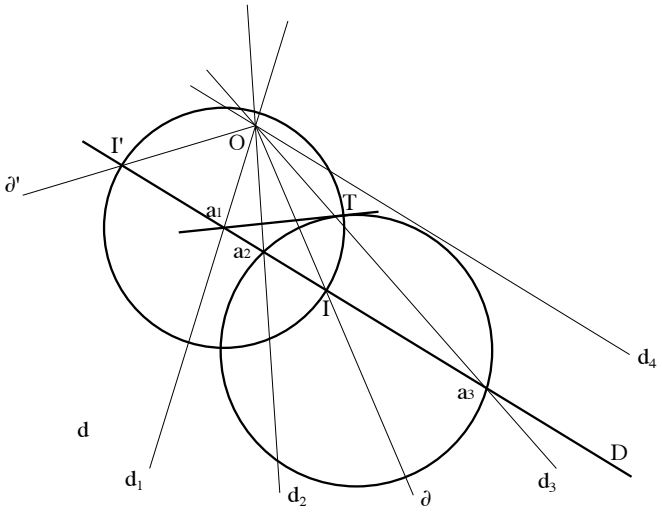


Figure 2

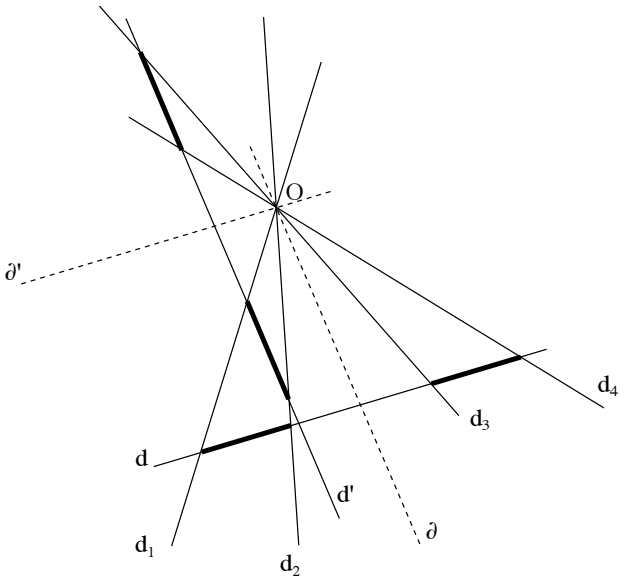


Figure 3

Reste à vérifier que cette construction donne bien une solution au problème. Ce qui est immédiat en reprenant les caractéristiques de la figure construite.

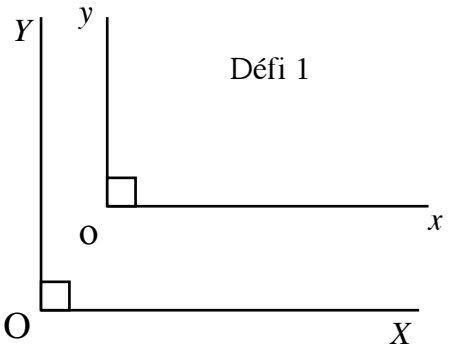
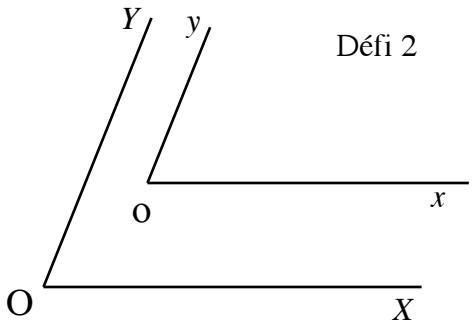
Laissons au lecteur la résolution du problème par la géométrie analytique : un repère judicieusement choisi est conseillé.

Remarques : 1) Il y a peut-être une construction plus simple, plus élégante… , mais à défaut !
2) Évidemment la question faisant l'objet du Défi collège proposée dans le Corol'aire n° 68 (NDLR : et que nous rappelons ci-dessous) semble relever de la même idée. La solution est notablement plus abordable !

Conclusion : ce qui précède prouve qu'il faut toujours se méfier des exercices paraissant évidents.

Défi collège

Cette rubrique veut proposer des petits problèmes qui peuvent être résolus avec les outils disponibles au collège. Corol'aire se fera un plaisir de publier les solutions des élèves, ou encore le compte rendu, par le professeur, de l'activité de la classe qui aura été mise au défi de le résoudre. *J. F.*

Défi proposé par Serge Parpay :

Soient les deux angles $\widehat{XOY}$ et $\widehat{xoy}$ aux côtés respectivement parallèles. Construire une droite D coupant *[OX)* en *A*, *[OY)* en *B*, *[ox)* en *a* et *[oy)* en *b* tels que *Aa = Bb*.