Edito

Echangeons

Notre académie est grande ! Les établissements sont en général fort éloignés les uns des autres et les occasions d'échanger entre enseignants de mathématiques sont trop rares. Notre association, par l'intermédiaire de son Corol'aire, offre la possibilité de rompre cet isolement et de disposer d'informations locales sur la vie de notre discipline. En ce sens, il tient complètement son rôle. Cependant il n'est pas un vecteur d'échanges suffisants. Il y a les habitués de la « Rubricollage » qui envoient régulièrement leurs contributions (merci chaleureusement à eux), mais une rubrique de problèmes, aussi stimulante soit elle, ne peut occuper toute la place du dialogue qui doit s'instaurer entre les membres de notre association. Il faut bien constater que le support papier n'est pas bien adapté à une communication rapide et informelle.

C'est pourquoi, nous mettons désormais à votre disposition un forum de discussion* accessible depuis le site de la Régionale et réservé aux seuls adhérents de l'Académie. Il vous permettra de donner votre avis sur l'actualité de la profession, de faire partager les difficultés et les joies de votre quotidien d'enseignant, d'entamer un débat avec un collègue ou un membre du comité, ou encore tout simplement de demander un renseignement à la cantonade. En vous emparant de cet outil, vous pourrez aussi faire vivre notre association de façon encore plus démocratique, en critiquant ou en soutenant telle ou telle position de la Régionale ou du National. Ces retours sont indispensables pour que les décisions et/ou les orientations prises soient en phase avec vos attentes. La parole est à vous.

Afin de vous donner tout de suite matière à discussion, je vous engage à réagir à l'article, contenu à l'intérieur de ce numéro, consacré à l'expédition d'une version électronique du Corol'aire. Le comité a besoin de votre avis avant de s'engager davantage dans cette voie.

La prochaine année scolaire s'annonce d'ores et déjà chargée tant en collège qu'en lycée, sans oublier la préparation des Journées Nationales 2008 à La Rochelle ; aussi je vous souhaite à toutes et à tous de bonnes et reposantes vacances et je vous dis : à la rentrée !

Frédéric de Ligt

*Merci à Samuel Dussubieux, notre irremplaçable web master.

SOMMAIRE

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

n°69

Juin 2007

Dispensé de timbrage | Poitiers Centre de tri

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

PRESSE
DISTRIBUÉ PAR
LA POSTE

DÉPOSÉ LE 02-07-07

APMEP : http://irem.univ-poitiers.fr/apmep
Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Le numéro : 1,5 € .
Abonnement 1 an (4 numéros) : 5 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric De LIGT
Comité de rédaction …	C. BLOCH, S. PARPAY, J. FROMENTIN, F. DE LIGT
Imprimerie …………..	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Editeur ……………….	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social ………….	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P. …………….	n° 0508G88007
Dépôt légal ………….	Juin 2007

Vie de l'Association

Comité Régional du 20 juin 2007

La réunion du Comité de la régionale s'est tenue à 14h30 au Lycée Jean Macé de Niort et a été suivie d'une réunion de préparation des Journées Nationales de l'APMEP à La Rochelle en octobre 2008.

Forum de discussion sur le site de la Régionale
Tout a été bâti par Samuel Dussubieux. Le Comité donne son accord pour établir un lien avec le site de la Régionale. Ce forum sera réservé aux adhérents de la Régionale.
Pour le moment, F. de Ligt s'occupe de répondre aux questions dans le forum.

Corol'aire
Discussion sur le projet d'une version électronique du Corol'aire. Voir l'article « Mise en perspective » dans ce numéro.

Compte-rendu du Comité national des 24 et 25 mars, du Séminaire national des 12 et 13 mai et préparation du Comité national des 23 et 24 juin.
Le comité des 24 et 25 mars a rappelé toute l'importance de faire connaître la déduction fiscale de 66 % sur la cotisation.
Un texte a été rédigé afin de protester contre la précipitation de la mise en place d'une épreuve de brevet modifié.
Le comité est revenu sur la mise en place du socle et sur l'épreuve de TP au bac S. Sur ce dernier point il recommande l'utilisation de logiciels libres et gratuits.
Le séminaire des 12 et 13 mai avait pour thème l'évaluation. Jacques Moisan (IGEN) et Marie Mégard (IGEN pour l'élémentaire) ont présenté les contours du futur livret de compétence qui doit accompagner la mise en place du socle.
Le comité des 23 et 24 juin prévoit de faire voter une augmentation des cotisations (largement compensée par la déduction fiscale). Le tout APMEP passerait de 65 € à 75 €. Le comité régional comprend la nécessité d'augmenter les recettes mais est réservé sur l'opportunité de cette mesure. Ce comité doit aussi se prononcer sur une modification de la ristourne en brochures et sur le texte d'orientation.

Option Sciences en 2nde
Différents courriers ont été envoyés. Les IPR, l'UDPPC et l'APBG n'ont pas encore répondu.
À signaler l'ouverture d'une option sciences par Vincent Ricomet au lycée Bellevue à Saintes et la mise en place depuis quelques temps par Dominique Souder d'une option scientifique (différente de l'option sciences préconisée par l'APMEP) au lycée Valin à La Rochelle.

Olympiades académiques
Voir l'article dans ce numéro.

Programmes soclés du collège et de l'école primaire
Ils sont parus aux BO des 12 et 19 avril 2007.
Peu de changement pour le primaire, quelques glissements de certaines notions et apparition de 15 min de calcul mental par jour. Tout ce qui est au programme de l'école primaire fait partie du socle et doit être maîtrisé à la sortie du collège.
Pour le collège, les programmes sont désormais écrits sur 4 colonnes : capacités, exemples d'activités, commentaires, commentaires spécifiques pour le socle.
Dans le socle commun ne seront pas évalués : la trigonométrie, les équations, les fonctions. Concernant les formules d'aires et de volumes, la distinction entre celles qui doivent être connues et celles qui doivent savoir être utilisées est assez complexe. Le vocabulaire à connaître est restreint.
Le socle est une question d'évaluation et non de programme.
Les nouveautés dans le programme de troisième : introduction des quartiles, puissances traitées sur deux années, disparition des vecteurs, de la géométrie analytique, de la rotation, de la translation.

Conférences
Deux conférences sont prévues, une à l'occasion de l'assemblée générale en décembre 2007 et une pour mars 2008.

Baccalauréat
L. M. Bonneval signale qu'un barème par compétences a été établi pour les corrections du Bac S et ES. C'est intéressant mais c'est dommage de ne le découvrir qu'au moment de la correction. La question va être débattue au Comité national.

Calendrier
A.G. le 05/12/07 au département de math au Futuroscope.
Réunions de Comité : 26/09/07 à La Rochelle et 30/10/07 à Besançon lors des Journées APMEP.

Chantal Gobin

Réception de COROL'AIRE par courrier électronique

Nom : .... Prénom : ....
Adresse postale : ....
....
....
accepte de recevoir Corol'aire par courrier électronique à l'adresse suivante* : ....

* Écrivez votre adresse très lisiblement.
À envoyer à : APMEP, Corol'aire
IREM - Faculté des Sciences, 40 Avenue de Recteur Pineau,
86022 Poitiers Cedex

Vous pouvez aussi adresser un Mél à :
apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
à partir de l'adresse à laquelle vous souhaitez recevoir Corol'aire, en précisant tout de même vos nom, prénom et adresse postale pour que nous puissions mettre à jour correctement le fichier des adhérents.

Mise en perspective

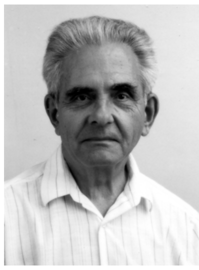
Vous savez sans doute que les instances dirigeantes de notre Association doivent faire face à des problèmes financiers liés à la diminution du nombre des adhérents. Parmi les mesures d'économie décidées, figure la baisse de la ristourne (part des adhésions reversée aux Régionales). Nous commençons à en ressentir les effets et notre trésorerie n'est pas au mieux. Les formidables journées 1993 au Futuroscope de Poitiers avaient amené près de 1100 personnes. Cela nous avait permis de constituer une jolie cagnotte avec laquelle nous avons pu faire face tranquillement à toutes les dépenses pendant plus d'une dizaine d'années. Mais cette cagnotte est épuisée et nous devons désormais faire des économies.
Nous comptons sur les journées 2008 à La Rochelle pour renflouer les caisses. Mais cela ne nous permettra pas pour autant de fonctionner comme avant car les règles nationales ont changé et nous ne pourrons plus garder la même part des recettes. Il faut préparer notre avenir et asseoir dès à présent notre gestion sur des bases solides. Comme nous ne voulons pas diminuer l'offre proposée aux collègues (conférences, animations, expositions, bulletin…) une piste a été ouverte : vous envoyer une version électronique du Corol'aire à la place de l'actuelle version papier (rares sont ceux, parmi vous, qui ne possèdent pas une adresse électronique personnelle en plus de l'adresse électronique professionnelle).
C'est une solution moderne et réaliste qui offre de nombreux avantages :
- Gain de temps pour le militant qui assure sa fabrication,
- Coûts d'impression et de diffusion réduits aux quelques exemplaires papier à destination de ceux qui n'ont pas d'adresse électronique personnelle ou qui tiendraient à recevoir le Corol'aire sous cette forme.

Le poids d'un tel envoi est acceptable (5 Mo maximum au format pdf) et il peut être raisonnablement imprimé par ceux qui le désirent (8 à 12 pages).
La formule que nous vous proposons (encadré de la page précédente) est basée sur une démarche volontaire de votre part et ne fera sans doute pas débat, mais il s'agit d'une amorce. Pour que ce changement porte vraiment ses fruits, il serait plus efficace de diffuser prioritairement sous forme électronique et de réserver la démarche volontaire à ceux qui n'en veulent pas. Le Petit Vert, qui est l'équivalent de notre Corol'aire en région Lorraine, est engagé dans la même voie mais n'a pas franchi ce pas et, faute de retours suffisants de la part des adhérents, continue à être envoyé principalement en version papier. Le problème de son coût n'a donc pas été résolu. Les risques que nous avons envisagés : votre mécontentement si vous êtes majoritairement attachés à la version papier, la mort du Corol'aire s'il n'est plus consulté.

Avant d'aller plus avant, nous avons besoin de votre avis. Le forum de discussion qui vient d'être mis en place sur le site de la Régionale est le lieu tout trouvé pour ce débat. Nous vous y attendons. Mais faites déjà la démarche volontaire en nous envoyant votre accord par La Poste (remplir l'encadré de la page précédente prévu à cet effet) ou, encore mieux, par Mél, ce qui nous permet de rentrer immédiatement votre adresse électronique.

Frédéric de Ligt

Hommage à Jacques FORT



Jacques Fort est décédé le 23 mai.
Au nom de l'A.P.M.E.P. et de l'I.R.E.M. nous venons lui rendre hommage et le remercier pour tout ce qu'il a fait pour notre association et pour cet institut.
L'un et l'autre avons eu avec Jacques Fort des rapports privilégiés. Serge Parpay a été son collègue au lycée Eugène Fromentin à La Rochelle en 1955 et 1957 et Jacques Chayé a participé aux recherches de la Commission Lichnerowicz dont Jacques Fort dirigeait l'équipe de Poitiers. Nous sommes restés en contact avec lui depuis cette époque, dans le cadre de l'A.P.M.E.P. et dans le cadre de l'I.R.E.M..
M. Raby a retracé la carrière de Jacques Fort dans une notice nécrologique qui est reprise dans ce numéro de Corol'aire.
Jacques Fort a toujours été militant de l'A.P.M.E.P. Quand il était président de la Régionale, il a su animer les équipes départementales existantes, organiser dans les années 60-70 de nombreuses réunions et conférences à Poitiers et Niort en particulier, devançant ainsi le travail de l'I.R.E.M.. En 1982, il avait organisé les Journées Nationales, journées qui connurent un immense succès. Il nous est resté fidèle et suivait toujours avec attention les travaux et publications tant au plan national qu'au plan régional.
On doit citer son travail pour les « Chantiers mathématiques » de l'Institut Pédagogique National et de la Radio Télévision Scolaire (publications et émissions de formation dans les domaines récents des mathématiques), son travail à la Commission Lichnerowicz, ses articles dans le Bulletin Vert.
À la tête de l'I.R.E.M., qu'il créa à Poitiers, il fit preuve de ses qualités d'organisateur et de chef d'équipe, conseillant les animateurs, les encourageant et les soutenant dans les initiatives (il fallait alors inventer de toute pièce). Il trouvait le temps de lire les documents que nous écrivions en direction des stagiaires, de les critiquer ou de les compléter.
Tous ses élèves à la Faculté reconnaissaient ses qualités de pédagogue, ses cours impeccables et son autorité naturelle.
Ses collègues, en particulier à l'I.R.E.M., ont pu apprécier sa gentillesse, sa modestie et sa grande compétence.
Nous avons représenté l'A.P.M.E.P. à ses obsèques.
À Madame Jeannine FORT, à ses enfants et petits-enfants, nous présentons, au nom de nos collègues, toutes nos condoléances.
Nous n'oublierons pas notre ami, le Professeur Jacques Fort.

Jacques Chayé, Serge Parpay

Jacques FORT

La communauté universitaire a appris avec tristesse la disparition de Jacques Fort, professeur de mathématiques, président de l'Université de Poitiers entre 1975 et 1980. Né en 1924 à Andilly (Charente Maritime), ce fils d'agriculteur, élève de l'Ecole Normale d'Instituteurs de La Rochelle fut d'abord, au lendemain de la guerre, instituteur, puis professeur de cours complémentaire. Des études supérieures entreprises sans interruption de son activité professionnelle le conduisirent à enseigner les mathématiques au Lycée de La Rochelle d'abord comme professeur certifié (1951), puis comme professeur agrégé (1954). Arrivé à la Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers en 1959, Jacques Fort ne devait plus la quitter jusqu'à son départ à la retraite en 1986. Auteur d'une thèse de doctorat d'Etat en 1964, il devient professeur sans chaire en 1967 et professeur titulaire en 1969.
Jacques Fort va alors marquer la vie de l'institution d'abord en fondant dès 1972 l'institut de recherche de l'enseignement des mathématiques (IREM), en dirigeant cet institut jusqu'en 1975 et en pilotant la formation des enseignants de mathématiques au niveau de l'Académie de Poitiers dans les années 70. Simultanément il préside, après l'année 1968, le conseil transitoire de gestion de la Faculté des Sciences de l'université de Poitiers, puis de 1971 à 1975 il dirige l'Unité d'Enseignement et de Recherche en Sciences Fondamentales et Appliquées. En 1975 il succède à Benoît Jeanneau à la présidence de l'Université de Poitiers.
L'Université de Poitiers et en particulier la Faculté des Sciences et le département de Mathématiques, rendent respectueusement hommage à Jacques FORT, homme de dialogue et enseignant passionné qui a consacré toute son énergie au service de l'enseignement supérieur. Ils s'associent à la douleur de sa famille.

Gilles Raby, doyen de la faculté des Sciences de Poitiers

Du côté de l'IREM

N'oublions pas la formation continue

S'inscrire à des stages de formation continue est important, d'une part pour prendre du recul par rapport au métier, d'autre part pour suivre les multiples réformes en cours...
Ces deux dernières années, nous avons assisté à une chute des inscriptions. Certains semblent ne pas avoir bien compris les procédures, c'est pourquoi nous les précisons ci-dessous.

Il y a trois types de stages :

1) Les « demandes d'établissement » (par exemple stages de liaison 3$^{\text{ème}}$-2$^{\text{nde}}$). Votre inscription est faite début septembre par votre chef d'établissement. Mais les formateurs aimeraient que vous leur précisiez au maximum vos demandes... N'hésitez pas à en discuter et à envoyer vos souhaits à irem@univ-poitiers.fr.

2) Les « stages à public désigné ». L'inspection préférant que, sauf exception, ce soient les équipes des établissements qui « désignent » les participants à ces stages, vous aurez à établir cette liste le jour de la pré-rentrée, liste que votre coordonnateur de mathématiques transmettra directement aux IPR.

3) Les « stages d'offre » restent sur candidature individuelle, mais celle-ci doit se faire très tôt en septembre. Le mieux est de vous en préoccuper à la pré-rentrée en même temps que les stages « public désigné » et que vous vous inscriviez (en ligne sur le site du rectorat) le soir même. Attention à bien mener cette inscription jusqu'au bout. L'an dernier quelques collègues ont eu des difficultés techniques, et comme ils s'y étaient pris trop tard, ils n'ont pas pu s'inscrire avant la date limite. C'est pourquoi nous vous invitons à vous inscrire dès la première semaine de septembre...

Le descriptif des stages proposés (public désigné et offre) est sur le site de l'académie et sur le site de l'IREM : http://irem.univ-irem.fr/irem. Sur ce dernier site, vous trouverez notamment le calendrier prévisionnel de ces stages. Signalons une nouveauté : quelques stages « collège » auront lieu le mardi. D'autre part, nous avons indiqué les mails des personnes directement impliquées dans l'animation de ces stages et que vous pourrez interroger pour toute précision.
Vous pouvez aussi nous écrire à irem@univ-poitiers.fr ou pour ce qui concerne l'organisation pratique à Claude Robin : clrobin@wanadoo.fr

Jean SOUVILLE, directeur de l'IREM.

Journées Nationales de l'APMEP
BESANÇON
du 28 au 31 octobre 2007.

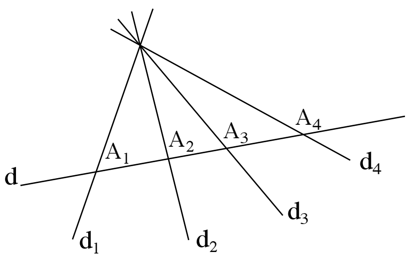
Le temps des mathématiques
Les mathématiques dans leur temps

Inscriptions sur le site des Journées : http://ctug48.univ-fcomte.fr/APMEP2007/

Histoire d'un exercice

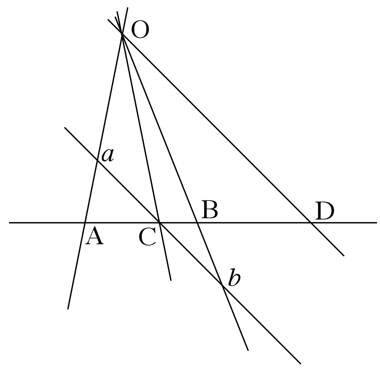
Serge PARPAY - Niort

Pour le Rallye Mathématique Poitou-Charentes, nous recherchons des exercices amusants et/ou curieux et si possible relativement neufs. J'en ai « fabriqué » quelques-uns (parfois un peu tordus !). Mais reste la question : quelle est la part de l'imagination et quelle est la part de souvenirs diffus de lectures anciennes ou récentes ?
Un exercice du dernier Rallye (mettant en jeu une pendule) provient d'une idée bizarroïde (« ça va pas la tête ?! ») que je revendique, en tout cas pas d'un bouquin, ou alors dites-moi lequel et merci du renseignement. Au fait, est-ce que l'exercice est drôle ? C'est une autre question ! (voir le texte des épreuves du Rallye dans le dernier Corol'aire).
Voulant faire quelque chose de plus simple, en crayonnant machinalement, j'ai eu l'idée suivante :



Quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 sont concourantes en un point O.
Construire une droite d qui coupe ces quatre droites respectivement en A_1, A_2, A_3 et A_4 de telle sorte que $A_1A_2 = A_3A_4$.
En brodant une petite histoire autour, cela me paraissait bien pour notre Rallye (niveaux Troisième et Seconde).
Bon, alors la construction ? Ben… ben… C'est évident, « y'a une droite, et même un tas de droites, toutes parallèles entre elles »… Ben quoi ?… Coi, le Prof Ila Ransor ; coite, l'aimable Léa Broutille ! Je n'ai pas trouvé la solution tout de suite ; laisser mijoter dans la cervelle… enfin trouvé, par la "vieille géométrie" naturellement, celle dont on dit parfois tant de mal ! Après, mais après seulement, j'ai fait l'exercice par l'analytique : intéressant d'ailleurs !
Une conséquence logique : mes chers collègues sont mis devant le problème. Normal, entre amis tous les coups sont permis. Je dois avouer que je n'ai pas eu le succès attendu. Certains n'ont rien fait, d'autres se sont posé des questions, d'autres on dit avoir cherché, d'autres ont sans doute trouvé depuis. Tous ont demandé, intrigués : « Mais où as-tu pris cet exercice ? » Comment ! mais il est de moi, cet exercice ! Pour une fois une petite gloire : Heureux ! comme aurait dit Fernand Raynaud.
Le problème est donné dans Corol'aire (n° 67 décembre 2006). Des réponses seront-elles proposées ? En tout cas, voilà une construction.

Préliminaires et rappels :



Quatre points A, B, C et D alignés forment une division harmonique si $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

On écrit par convention (A,B,C,D) = -1.
Trois des quatre points d'une division étant donnés, le quatrième est parfaitement déterminé.

I étant le milieu du segment AB, on a $IA^2 = IB^2 = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}$ *(condition nécessaire et suffisante)*

J étant le milieu du segment CD, on a $JC^2 = JD^2 = \overline{JA}\,.\,\overline{JB}$ *(idem).*
(A,B,C,D) étant une division harmonique et O étant un point extérieur à la droite support de la division, les droites (OA), (OB), (OC) et (OD) forment un faisceau harmonique.
On écrit par convention (OA,OB,OC,OD) = - 1.
Une parallèle à un des rayons du faisceau est divisée par les trois autres en deux segments égaux (condition nécessaire et suffisante) ; par exemple, sur la figure ci-contre aC = Cb : pour le démontrer voir les triangles semblables ACa et ADO d'une part, BCb et BDO d'autre part et utiliser $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.
Un faisceau harmonique découpe sur toute droite non parallèle à un des rayons du faisceau une division harmonique (utiliser l'idée précédente).

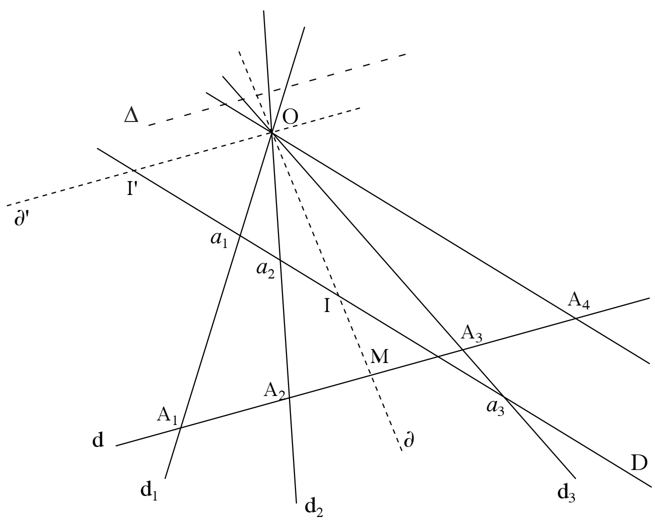


Figure 1

Soit d une droite répondant à la question (remarquons que toute parallèle à d, par exemple Δ, conviendrait également) (figure 1).
$A_1A_2 = A_3A_4$. Les segments A_1A_4 et A_2A_3 ont le même milieu M. Soit ∂ la droite passant par les points O et M et soit ∂' la parallèle à d passant par O.
M étant le milieu de $[A_2A_3]$, $(d_2, d_3, \partial, \partial') = -1$. M étant le

milieu de $[A_1A_4]$, $(d_1, d_4, \partial, \partial') = -1$. Soit alors une droite D parallèle à d_4, coupant ∂ en I, ∂' en I', d_1 en a_1, d_2 en a_2, d_3 en a_3. $(d_1, d_4, \partial, \partial') = -1$ et D parallèle à d_4 : donc a_1 est le milieu du segment [I I'].

$(d_2, d_3, \partial, \partial') = -1$ et a_1 milieu du segment [I I'] : donc $a_1I^2 = a_1I'^2 = \overline{a_1a_2}.\ \overline{a_1a_3}$

Cette relation permet la construction de I et de I', et par suite des droites ∂ et ∂'.

Construction (Figure 2) :
une droite D parallèle à d_4 donne les points a_1, a_2 et a_3 ; on trace un cercle passant par a_2 et a_3, une tangente (a_1T) à ce cercle (on a alors $a_1I^2 = a_1I'^2 = \overline{a_1a_2}.\ \overline{a_1a_3}$) le cercle de centre a_1 et de rayon a_1T coupe la droite D aux points I et I'. On construit les droites (OI) (∂) et (OI') (∂'). Une droite d parallèle à ∂' répondra à la question.

Les deux droites jouent un rôle équivalent dans les faisceaux de droites : de même que toute droite d parallèle à ∂', toute droite d' parallèle à ∂ répond à la question (figure 3).

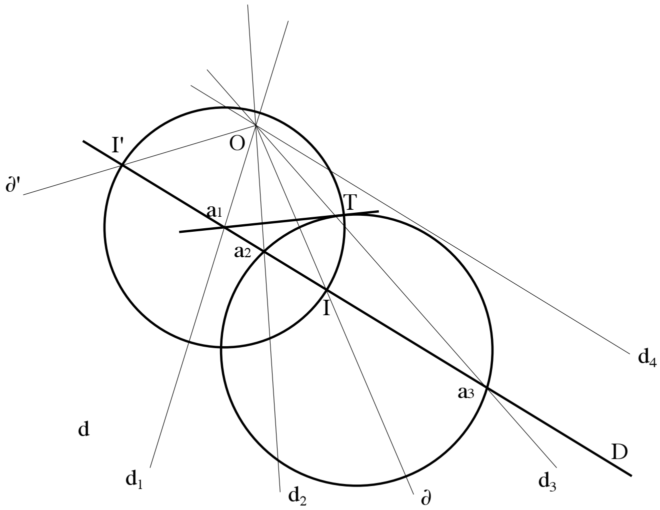


Figure 2

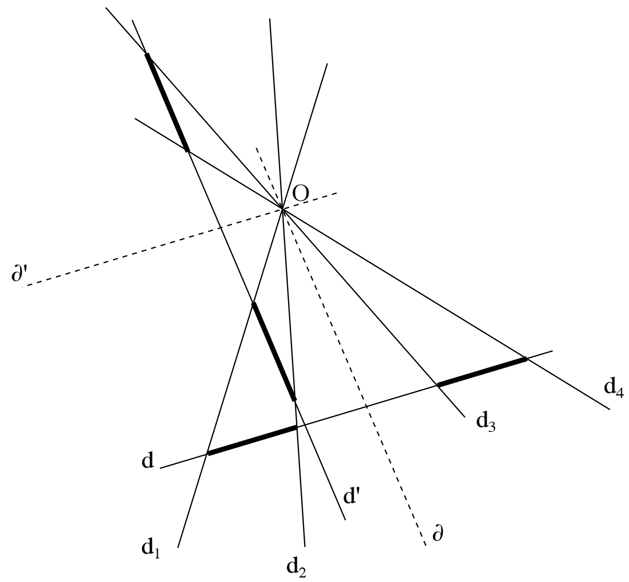


Figure 3

Reste à vérifier que cette construction donne bien une solution au problème. Ce qui est immédiat en reprenant les caractéristiques de la figure construite.

Laissons au lecteur la résolution du problème par la géométrie analytique : un repère judicieusement choisi est conseillé.

Remarques : 1) Il y a peut-être une construction plus simple, plus élégante… , mais à défaut !
2) Évidemment la question faisant l'objet du Défi collège proposée dans le Corol'aire n° 68 (NDLR : et que nous rappelons ci-dessous) semble relever de la même idée. La solution est notablement plus abordable !

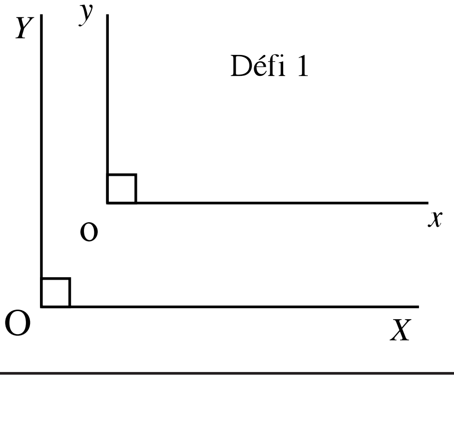
Conclusion : ce qui précède prouve qu'il faut toujours se méfier des exercices paraissant évidents.

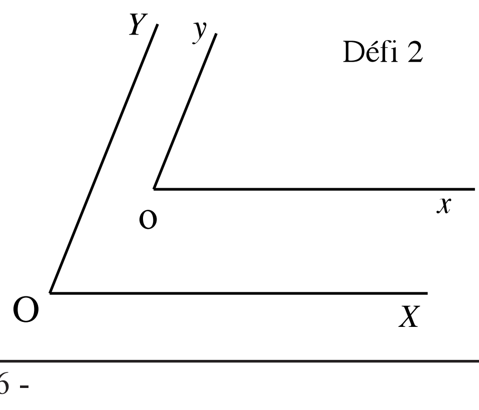
Défi collège

Cette rubrique veut proposer des petits problèmes qui peuvent être résolus avec les outils disponibles au collège. Corol'aire se fera un plaisir de publier les solutions des élèves, ou encore le compte rendu, par le professeur, de l'activité de la classe qui aura été mise au défi de le résoudre. J. F.

Défi proposé par Serge Parpay :

Soient les deux angles $\widehat{XOY}$ et $\widehat{xoy}$ aux côtés respectivement parallèles. Construire une droite D coupant *[OX)* en *A*, *[OY)* en *B*, *[ox)* en *a* et *[oy)* en *b* tels que *Aa = Bb*.





Rallye Mathématique Poitou - Charentes

20 février 2007

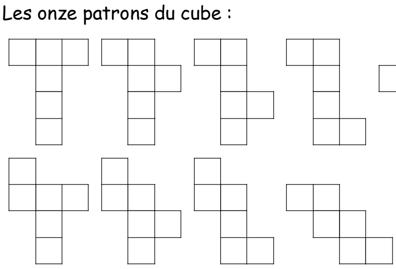
Éléments de solutions

6e

① Alicia BOOLE-STOTT *(8 points)*

Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien George Boole et la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.

Les onze patrons du cube :



② La valeur des fruits *(10 points)*

1°) Voici quelque fruits "égaux" deux par deux :
BANANE et PÊCHE (37), FIGUE et COING (48), RAISIN et CASSIS (70), PRUNE et TOMATE (74), MIRABELLE et MUSCAT (77)...

2°) et quelques fruits égaux trois par trois :
ANANAS, CAJOU et DATTE (50), CERISE, MELON et SORBE (59), AVOCAT, NOIX et POMME (62), GUIGNE, OLIVE et POIRE (63)...

③ Des valises à boucler *(5 points)*

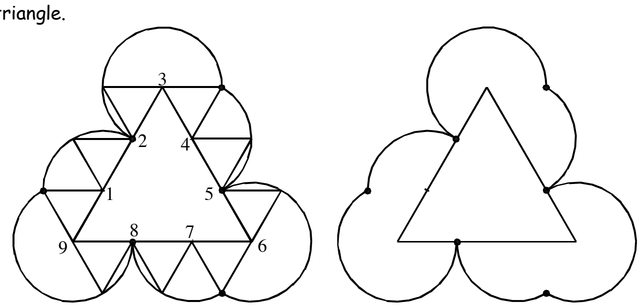
En répartissant à peu près les masses par un calcul mental sur les ordres de grandeur, et en procédant à des ajustements, on obtient la répartition suivante en grammes :
6 800 + 4 800 + 3 600 + 1 500 + 700 + 2 500 = 19 900 ;
6 300 + 5 400 + 3 200 + 1 900 + 700 + 2 500 = 20 000.

④ Chiffres au compteur *(10 points)*

1°) On observe les chiffres non utilisés (0, 2, 3, 4, 5, 6 et 9) on choisit le plus petit (plus grand que 1) pour le chiffre de plus grand rang. Le premier palindrome qui répond aux conditions est donc 20 302 qui sera obtenu dans 2 431 km.
2°) Dans les mêmes conditions, le suivant est 45654.

⑤ Triangle au tournant *(15 points)*

Une méthode sûre pour obtenir le tracé pouvait être de découper un triangle, d'y repérer un point M (point noir sur le dessin ci-dessous) et de le suivre en faisant "tourner" le triangle découpé autour du grand triangle.



Rallye Mathématique Poitou - Charentes

20 février 2007

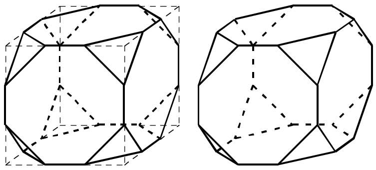
Éléments de solutions

5e

① Alicia BOOLE-STOTT *(15 points)*

Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien George Boole et la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.

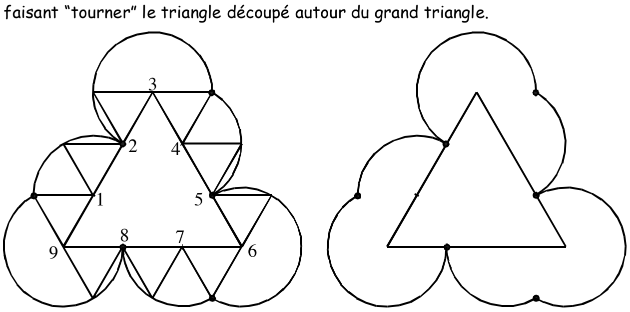
Le solide obtenu a
- 14 faces (6 faces du cube plus 8 autres faces, une à chaque sommet du cube)
- 36 arêtes (12 arêtes du cube plus 3 arêtes dans chaque sommet du cube)



- 24 sommets (3 sommets à la place de chacun des 8 sommets du cube).

② Triangle au tournant *(15 points)*

Une méthode sûre pour obtenir le tracé pouvait être de découper un triangle, d'y repérer un point M (point noir sur le dessin ci-dessous) et de le suivre en faisant "tourner" le triangle découpé autour du grand triangle.



③ Devinette *(10 points)*

En mettant les informations dans l'ordre ci-dessous, on obtient :
1 = A pour la seconde lettre, 12 = L pour la troisième lettre, 18 = R pour la première lettre, 12 = L pour la quatrième lettre. La définition de la sixième lettre prête à confusion ; mais la dernière information lève l'ambiguïté et on obtient 5 = E pour la sixième et 25 = Y pour la cinquième.
Ainsi le mot cherché est **RALLYE**.

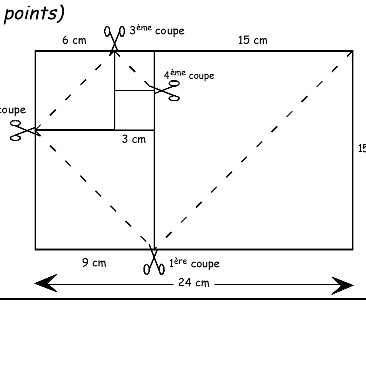
④ Avec quatre nombres *(15 points)*

1 8 5 2 5 1 2 8

Voici des solutions jusqu'à **43** :
0 = 8 – (1 + 2 + 5) ; **1** = [(8 : 2) + 1] : 5 ; **2** = 2 x 5 - 8 x 1 ; **3** = 2 x 5 - (8 - 1)
4 = 8 : (5 - 2 - 1) ; **5** = 8 - (5 - 2 x 1) ; **6** = 8 - [5 - (2 + 1)] ; **7** = (8 + 5 + 1) : 2 ;
8 = (8 : 2) + 5 - 1 ; **9** = (8 : 2) + (5 : 1) ; **10** = 8 + (5 - 2 - 1) ; **11** = 8 x 2 x 1 - 5 ;
12 = 8 + 5 - 2 + 1 ; **13** = (8 + 5) : (2 - 1) ; **14** = 8 + 5 + 2 - 1 ; **15** = 8 + 5 + 2 x 1 ;
16 = 8 + 5 + 2 + 1 ; **17** = 5 x 2 + 8 - 1 ; **18** = 5 x 2 + 8 : 1 ; **19** = 5 x 2 + 8 + 1 ;
20 = 8 x 2 + 5 - 1 ; **21** = 8 x 2 + 5 : 1 ; **22** = 8 x 2 + 5 + 1 ; **23** = (2 + 1) x 5 + 8 ;
24 = 8 x (5 - 2 x 1) ; **25** = (8 - 2 - 1) x 5 ; **26** = (8 + 5) x 2 : 1 ; **27** = (8 + 5) x 2 + 1 ;
28 = (8 + 5 + 1) x 2 ; **29** = 8 x (2 + 1) + 5 ; **30** = (8 - 2) x 5 x 1 ; **31** = (8 - 2) x 5 + 1 ;
32 = 8 x (5 + 1 - 2) ; **33** = (8 - 1) x 5 - 2 ; **34** = 8 x (5 - 1) + 2 ; **35** = (8 - 2 + 1) x 5 ;
36 = (8 - 2)(5 + 1) ; **37** = 8 x 5 - 2 - 1 ; **38** = 8 x 5 - 2 x 1 ; **39** = 8 x 5 - 2 + 1 ;
40 = (8 + 2)(5 - 1) ; **41** = 8 x 5 + 2 - 1 ; **42** = 8 x 5 + 2 x 1 ; **43** = 8 x 5 + 2 + 1 ;
44 = 8 x (5 + 2 : 1) ; **45** = (8 + 2 - 1) x 5 ; **46** = (5 + 1) x 8 - 2 ; **47** = (8 + 1) x 5 + 2 ;
48 = 8 x (5 + 2 - 1) ; **49** = (5 + 2)(8 - 1) ; **50** = 5 x (8 + 2) x 1 ; **51** = 5 x (8 + 2) + 1 ;
Qui trouvera 52 ?

⑤ Pliage et découpage *(10 points)*

En partant du carré de 3x3 et en "remontant" les opérations, on obtient un rectangle de 24 x 15.
Remarque : Il n'était pas dit que les carrés successifs étaient de dimensions différentes. Aussi le rectangle initial peut avoir d'autres dimensions.



Rallye Mathématique Poitou - Charentes

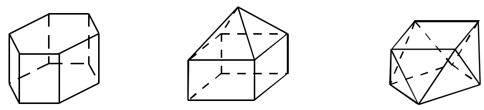
20 février 2007
Éléments de solutions

4e

1 Alicia BOOLE-STOTT *(15 points)*

Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien George Boole et la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.

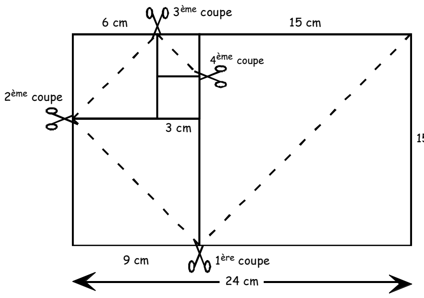
Formule d'Euler : F + S = A + 2.



(A) 8 + 12 = 18 + 2. (B) 9 + 9 = 16 + 2. (C) 10 + 8 = 16 + 2.

2 Pliage et découpage *(10 points)*

En partant du carré de 3x3 et en "remontant" les opérations, on obtient un rectangle de 24 x 15.
Remarque : Il n'était pas dit que les carrés successifs étaient de dimensions différentes. Aussi le rectangle initial peut avoir d'autres dimensions.

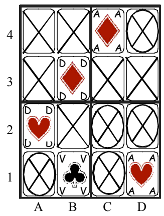


3 La barbe du Père Noël *(15 points)*

Partant du 25 décembre 2000 où le Père Noël a rasé sa barbe, en un an elle pousse de 365 mm et est raccourcie de 150 mm. Elle mesure donc 215 mm de plus à chaque Noël, sauf en 2004 qui est une année bissextile où elle prend 216 mm. Au Noël 2006, elle mesure donc 5 x 215 + 216 = 1291. Elle touche le sol 5 jours avant Noël 2007. Elle a donc poussé de 360 mm. Elle mesure donc 1291 + 360 = 1651 mm. En ajoutant la hauteur de la tête du Père Noël, soit 150 mm, le Père Noël mesure donc, au cm près, 1,80 m.

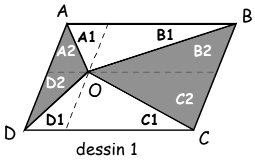
4 Une variante du sudoku junior *(10 points)*

1°) La dame de cœur n'est ni sur la ligne, ni sur la colonne, ni dans le carré de 2x2 qui contiennent la dame de carreaux (X).
2°) La dame de cœur n'est ni sur la ligne, ni sur la colonne, ni dans le carré de 2x2 qui contiennent l'as de cœur (⊗).
3°) La dame de cœur est donc en A2.



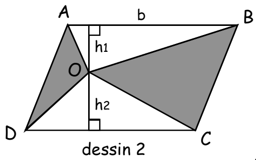
5 Le partage idéal *(10 points)*

1ère méthode : (dessin 1)
En traçant par le point O deux parallèles aux côtés du parallélogramme, on partage les quatre triangles AOB, BOC, COD et DOA en deux triangles désignés respectivement A1 et B1, A2 et B2, ... Les triangles A1 et A2, B1 et B2 ... ont respectivement la même aire. L'aire blanche est donc égale à l'aire grise quelle que soit la position du point O à l'intérieur du parallélogramme.



dessin 1

2ème méthode : (dessin 2)
L'aire des deux triangles blancs est : $\frac{b(h_1 + h_2)}{2}$.
Elle est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Donc l'aire grise est aussi égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Les deux aires, blanche et grise, sont donc toujours égales.



dessin 2

Rallye Mathématique Poitou - Charentes

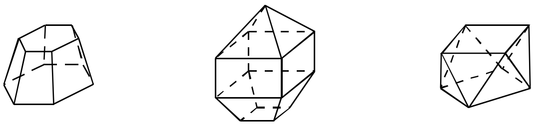
20 février 2007
Éléments de solutions

3e

1 Alicia BOOLE-STOTT *(13 points)*

Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien Georges Boole surtout connu comme étant le concepteur de la logique symbolique (algèbre booléenne), logique transcrite en équations algébriques.
Elle est la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.
Elle s'est illustrée par ses travaux sur les polytopes (polyèdres de dimensions 4).

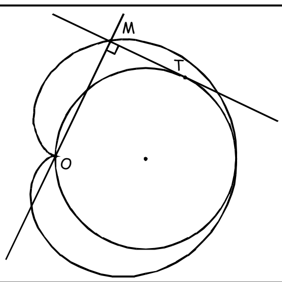
Formule d'Euler : F + S = A + 2.



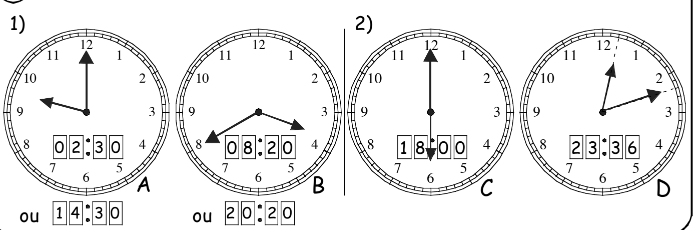
(A) 8 + 12 = 18 + 2 (B) 13 + 13 = 24 + 2 (C) 10 + 8 = 16 + 2

2 Une construction *(15 points)*

On obtient une cardioïde.



3 Tout à l'heure *(15 points)*



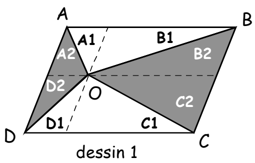
4 Tonton Cristobal *(10 points)*

Tonton Cristobal qui n'est plus très jeune a 3 neveux qui ont un an d'écart (par exemple 18, 19 et 20 ans). Il a également 5 petits enfants qui ont également un an d'écart et 7 petits neveux qui ont aussi un an d'écart. Quand Tonton Cristobal ajoute les âges de ses neveux il trouve son âge. De même, s'il ajoute les âges de ses petits enfants il trouve encore son âge et également s'il ajoute les âges de ses petits neveux. Mais au fait, quel est l'âge de Tonton Cristobal ?

En notant (n - 1), n et (n + 1) les âges de ses neveux, (p - 2), (p - 1), p, (p + 1) et (p + 2) les âges de ses 5 petits-enfants et (q - 3), (q - 2), (q - 1), q, (q + 1), (q + 2) et (q + 3) les âges de ses 7 petits-neveux, on remarque que l'âge de Tonton Cristobal est 3n = 5p = 7q. L'âge de Tonton Cristobal est donc un multiple de 3 x 5 x 7 = 105. Vu le contexte, Tonton Cristobal a 105 ans.

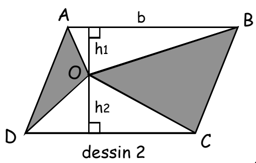
5 Le partage idéal *(10 points)*

1ère méthode : (dessin 1)
En traçant par le point O deux parallèles aux côtés du parallélogramme, on partage les quatre triangles AOB, BOC, COD et DOA en deux triangles désignés respectivement A1 et B1, A2 et B2, ... Les triangles A1 et A2, B1 et B2 ... ont respectivement la même aire. L'aire blanche est donc égale à l'aire grise quelle que soit la position du point O à l'intérieur du parallélogramme.



dessin 1

2ème méthode : (dessin 2)
L'aire des deux triangles blancs est : $\frac{b(h_1 + h_2)}{2}$.
Elle est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Donc l'aire grise est aussi égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Les deux aires, blanche et grise, sont donc toujours égales.



dessin 2

*R*allye *M*athématique *P*oitou - *C*harentes

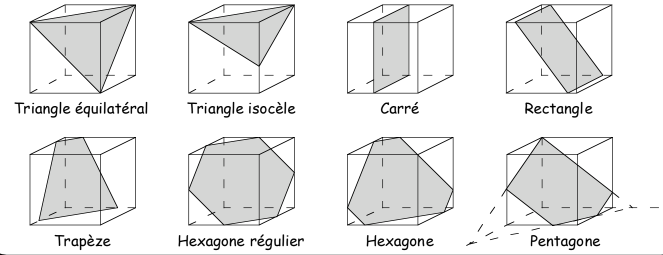
20 février 2007

Éléments de solutions

2^{e}

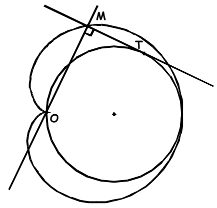
① Alicia BOOLE-STOTT *(14 points)*

Alicia Boole est née le 8 juin 1860 à Cork en Irlande.
Elle meurt à Londres le 17 décembre 1940.
Elle est la fille du célèbre mathématicien Georges Boole surtout connu comme étant le concepteur de la logique symbolique (algèbre booléenne), logique transcrite en équations algébriques.
Elle est la nièce de George Everest qui a calculé la hauteur du mont Everest.
Elle s'est illustrée par ses travaux sur les polytopes (polyèdres de dimensions 4).

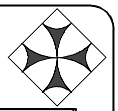


② Une construction *(15 points)*

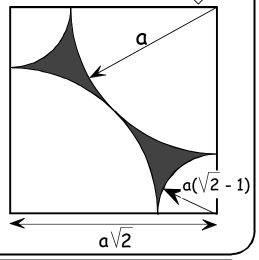
On obtient une cardioïde.



③ Une nouvelle croix de Malte *(10 points)*



En choisissant *a* comme demi-diagonale du grand carré, l'aire de ce grand carré est $2a^2$. L'aire de deux branches de la croix est donc égale à l'aire du grand carré moins les deux quarts de disques de rayons *a* et moins les deux quarts de disques de rayon $a(\sqrt{2}-1)$, soit $2a^2 - \pi a^2/2 - \pi a^2(\sqrt{2}-1)^2/2$.
L'aire des quatre branches de la croix est donc le double : $4a^2 - \pi a^2 - \pi a^2(\sqrt{2}-1)^2$. Après simplification d'écriture, il vient : $2a^2[2 + (\sqrt{2}-2)\pi]$. Le rapport de la croix au carré est donc $2 + (\sqrt{2}-2)\pi$, soit 0,16 par excès, ce qui est inférieur à 0,20.
Le grand maître a donc raison.



④ Le muguet *(10 points)*

Un champ carré est divisé en 9 petits carrés. Chacun de ces petits champs contient 19 brins de muguet, et il y a au total dans le grand champ 2011 clochettes. Les brins de muguet peuvent avoir 11, 12 ou 13 clochettes, mais il y a plus de muguets à 12 clochettes que de muguets à 13 clochettes.
Combien y a-t-il de brins de muguet à 13 clochettes au maximum ?

Il y a 9 x 19 = 171 brins de muguet. Si x, y et z désignent respectivement les nombres de brins à 11, 12 et 13 clochettes, on obtient le système suivant que l'on résout en y et en z :

$$\begin{cases} x+y+z=171 \\ 11x+12y+13z=2011 \\ z<y \end{cases}$$

Éliminer x conduit à $y + 2z = 130$.
Puisque $z < y$, on a $3z < y + 2z < 3y$, soit $3z < 130 < 3y$, ce qui conduit à $z \leq 43$ et $y \geq 44$. Il y a donc au maximum 43 brins de muguet à 13 clochettes. Si c'est le cas, il y a alors 44 brins de muguet à 12 clochettes et 84 brins de muguet à 11 clochettes.

⑤ À la recherche des promotions équivalentes *(15 points)*

Établissons les rapports : (prix/quantité), noté P/Q.
Si x = 10 % et y = 10 %, les rapports sont 0,9P/Q pour Miniprix et P/1,1Q pour Maxiprodplus. Or 9/10 < 10/11 ; Miniprix est donc plus avantageux.
Si x = 20 % et y = 25 %, on a 0,8P/Q pour Miniprix et P/1,25Q pour Maxiprodplus.
Les rapports sont égaux, les deux magasins sont aussi avantageux l'un que l'autre.
De façon générale, pour que les promotions soient équivalentes, il faut :

$\dfrac{(100-x)P}{100Q} = \dfrac{P}{(1+y/100)Q}$. Il faut donc que : $\dfrac{(100-x)}{100} = \dfrac{100}{100+y}$, ou encore que $(100-x)(100+y) = 10\,000$.

Olympiades académiques de mathématiques : bilan 2007

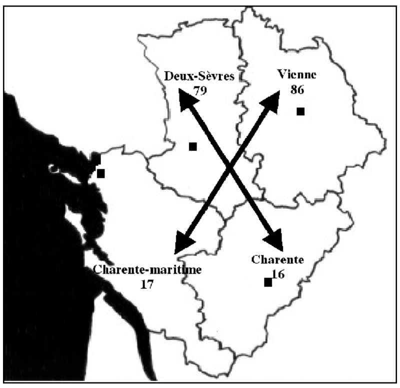
Le 6 juin dernier au rectorat de Poitiers avait lieu la remise des prix des Olympiades.
Le recteur Frédéric Cadet, évoquant l'angoisse de beaucoup d'élèves français vis-à-vis des mathématiques, a souligné l'intérêt des Olympiades, qui se situent hors de tout enjeu scolaire.
Il a rappelé qu'elles s'adressent désormais à tous les élèves de Première. Certes, avec 36 participants, la filière S domine largement, mais il y avait aussi 6 élèves de ES, 1 élève de STG et 1 élève de STI.

L'équipe régionale (Frédéric De Ligt, Marc Le Métayer, Jacques Marot, Dominique Souder, Hassan Tarfaoui*) avait préparé les deux exercices régionaux, et a évalué les travaux des participants.
Les sujets (deux exercices nationaux, deux exercices régionaux) sont disponibles sur le site académique www.ac-poitiers.fr : dans la rubrique "Disciplines et filières" choisir "Mathématiques collèges-LGT", puis "Pour les élèves".
François La Fontaine, IPR de mathématiques, a présenté l'exercice ci-dessous, conçu par Frédéric de Ligt, que nous soumettons à la sagacité des lecteurs de Corol'aire.

** qui passe le relais l'année prochaine à Jean-Michel Sarlat.*

Une somme déterminante ?

Les numéros des quatre départements de la région Poitou-Charentes sont liés ensemble par une relation qui peut sembler étonnante.
Observez plutôt : 16 + 17 + 79 + 86 = 86 x 17 – 79 x 16.
La relation : $a + b + c + d = db - ca$ avec $a < b < c < d$ (1) entre les numéros de quatre départements est-elle exceptionnelle ?
Pour les besoins de l'exercice, vous conviendrez de la numérotation fantaisiste suivante : 20 (Corse du Sud) ; 96 (Haute Corse) ; 97 (Guadeloupe) ; 98 (Martinique) ; 99 (Guyane) ; 100 (Réunion). Ainsi vous disposerez des 100 départements français numérotés de 1 à 100.
a) Donner quatre autres numéros de département vérifiant la relation (1) et produisant de plus exactement le même résultat que la région Poitou-Charentes à savoir 198.
b) La relation (1) peut-elle produire un résultat impair ?
c) Au total, combien peut-on former de groupes de quatre départements vérifiant la relation (1) ?



Enfin les lauréats ont reçu leurs prix :
- 1ère S : Benoît LOISEL (C. Guérin Poitiers), Valentin QUINT (C. Guérin Poitiers), Nicolas ROLLAND (C. Guérin Poitiers), Mih-Tâm VO (C. Guérin Poitiers), Marlène JAULIN (Bois d'Amour Poitiers), Christophe ALLARD (E. Vinet Barbezieux), Julien JEAN (Saint-André Niort).
- 1ère ES : Benoît GEAIRAIN (M. Genevoix Bressuire).

Bravo à eux (et à leurs professeurs) !

Louis-Marie BONNEVAL

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Jean-Christophe Laugier (Rochefort) nous présente une démonstration issue de la théorie des graphes qui l'a particulièrement impressionné :

Il arrive que l'on ressente un profond sentiment esthétique devant une démonstration mathématique ingénieuse. J'en veux pour preuve une démonstration d'un fascinant énoncé dû à Ramsey que l'on peut énoncer sous la forme : *P étant une population infinie d'individus, il est toujours possible d'extraire de P une infinité d'individus qui se connaissent mutuellement ou sont tous mutuellement étrangers.*

Pour l'anecdote, Paul Erdös a posé ce problème à Louis Posa, alors âgé de 13 ans. Celui-ci mit 15 minutes à saisir l'énoncé. Rentré chez lui, il y réfléchit toute la soirée et, avant d'aller se coucher, il en avait trouvé une démonstration. Je tiens ces renseignements de l'admirable livre de Ross Honsberger « Joyaux Mathématiques ». Ross Honsberger livre l'idée de la démonstration du théorème de Ramsey, que j'ai rédigée et que je joins. Je ne résiste pas à l'envie de faire partager aux lecteurs de COROL'AIRE le plaisir que j'ai ressenti.

Démonstration du théorème de Ramsey :

La démonstration du théorème de Ramsey repose sur la construction d'un sous-ensemble X = $\{x_1, x_2, \dots\}$ infini dénombrable de P possédant la propriété remarquable suivante : *pour tout $i \geq 1$, x_i connaît tous les x_j tels que $j > i$ <u>ou</u> x_i ne connaît aucun des x_j tels que $j > i$.*

X étant construit, les deux sous-ensembles Y et Z :

$Y = \{x_i \in X \,/\, x_i$ connaît x_j pour tout $j > i\}$, $Z = \{x_i \in X \,/\, x_i$ ne connaît pas x_j pour tout $j > i\}$ constituent donc une partition de X.

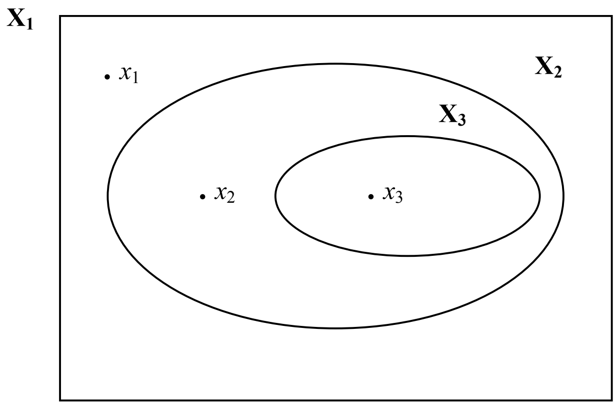
Puisque X est infini, l'un des deux sous-ensembles Y et Z est infini et fournit l'ensemble infini cherché de personnes se connaissant mutuellement ou mutuellement étrangères. Il s'agit à présent de construire l'ensemble X. Introduisons tout d'abord les définitions suivantes :

Si A est une partie de P et si $a \in P - A$, on dit que a connaît (resp. est étranger à) A si a connaît (resp. est étranger à) tout individu de A.

La construction de X, comme on va le voir, repose sur l'application répétée du lemme suivant facile à établir : *Si A est une partie infinie de P et si $a \in A$, il existe une partie infinie A' de $A - \{a\}$ telle que a connaît A' ou est étranger à A'.*

Par application du lemme, on construit aisément par récurrence une suite (x_n) d'éléments de P et une suite (X_n) de parties infinies de P vérifiant : $X_1 = P$; pour tout $n \geq 1$, $x_n \in X_n$, $X_{n+1} \subset X_n - \{x_n\}$, x_n connaît X_{n+1} ou est étranger à X_{n+1}. Il résulte de la construction précédente que $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \subset X_{n+1}$ et par suite x_n connaît $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ ou est étranger à $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$.

On a bien obtenu l'ensemble X = $\{x_1, x_2, \dots\}$ cherché.



Quant à **Marc Blanchard** (Rochefort), il nous propose une curiosité géométrique :

Dans un plan, soit G le barycentre de 3 points massifs donnés (A, a), (B, b), (C, c) non alignés tels que $a + b + c = 1$ et $abc \neq 0$.

Considérons A', B', C' tels que : $\overrightarrow{B'C'} = a\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{C'A'} = b\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{A'B'} = c\overrightarrow{GC}$ (c'est licite car $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$).

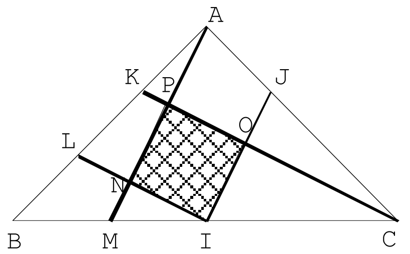
Nommons G' le barycentre de (A', a), (B', b), (C', c). Alors : $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$,

donc $\overrightarrow{A'G'} = b\overrightarrow{A'B'} + c\overrightarrow{A'C'} = bc(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}) = bc\overrightarrow{BC}$. De même $\overrightarrow{B'G'} = ca\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{C'G'} = ab\overrightarrow{AB}$. On en déduit les parallélismes : (A'G') // (BC), (B'G') // (CA), (C'G') // (AB) et une construction aisée de G'. En itérant le processus, on obtient un triangle A''B''C'' homothétique du triangle initial ABC dans le rapport –abc. Ce résultat ne se généralise pas à plus de 3 points et n'a pas de sens pour deux seuls points. On comprend donc qu'il ne soit guère connu car relève plus de la curiosité que de l'intérêt !

Des problèmes

69-1 *de Jean-Paul Guichard (Parthenay)* :
Partager un triangle équilatéral en cinq triangles isocèles.

69-2 *de Gilles Auriault (Oslo)* :
ABC est un triangle rectangle-isocèle en A. K et J sont au tiers des longueurs des côtés respectifs [AB] et [AC] à partir de A. L est le milieu de [KB], I est le milieu de [BC] et M est le milieu de [BI]. Démontrer que INPO est un carré (autre question qui présente moins d'intérêt : calculer l'aire de INPO en fonction de celle de ABC).

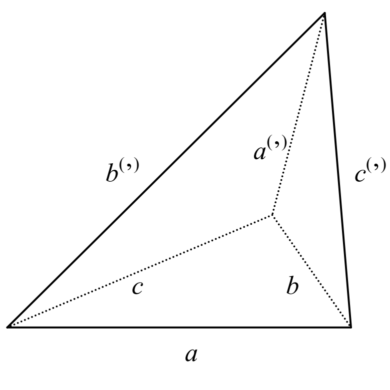


69-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Quelle(s) valeur(s) faut-il donner aux réels p et q pour que le graphe de la fonction f, définie sur [-1 ; 1] par $f(x)=x^2 +px +q$, s'écarte le moins possible de l'axe des abscisses ?

Des solutions

65-1 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Ce fut comme un éclair. Si un tétraèdre est régulier, ses quatre faces ont la même aire. Evident ! Mais la réciproque ne serait-elle pas vraie elle aussi ? Tout en marchant vers le lycée, je me promets d'y réfléchir. C'est tout bête un tétraèdre, mais c'est quand même plus compliqué que cela n'y paraît. Et mon problème me semble bien plus compliqué que ce que je pensais.
Au lycée, je croise Jean-Christophe Laugier, un spécialiste de la rubrique. Bien évidemment, je lui soumets mon petit problème. Le lendemain, dans mon casier, je pouvais lire un contre exemple, signé Jean-Christophe.
Sauriez vous aussi mettre à plat cette conjecture ?
Deux jours après, Jean-Christophe m'avait photocopié un document fort intéressant sur le tétraèdre. Si on y trouvait des résultats assez difficiles à démontrer (du moins pour moi), il y avait également un "petit bijou", c'est-à-dire un résultat assez facile à obtenir et assez méconnu (en tout cas par moi !), qui peut être posé en classe de troisième ou de seconde. Sauriez vous démontrer qu'un tétraèdre a ses arêtes opposées de même longueur si et seulement si les quatre faces ont le même périmètre ? Que peut-on dire alors des quatre faces de ce tétraèdre ?

Solution de Frédéric de Ligt :
Il suffit de prendre des valeurs de a, b et c différentes avec le tétraèdre ci-contre pour mettre à plat la première conjecture. On part du même solide pour voir que le sens direct de la seconde affirmation est immédiatement prouvé.
Il reste à montrer que si les périmètres des quatre faces d'un tétraèdre sont égaux alors les arêtes opposées de celui-ci sont de même longueur. Chaque arête d'un tétraèdre participe à deux faces. Soit p le périmètre commun à ces quatre faces et a, b, c, a', b', c' les différentes longueurs des arêtes qui peuvent apparaître.
On a $a + b + c = a + b' + c' = a' + b' + c = a' + b + c' = p$; en additionnant on obtient $2a + 2b + 2c + 2a' + 2b' + 2c' = 4p$, d'où $a' + b' + c' = p$. Associé à l'égalité $a + b' + c' = p$, on aboutit à $a = a'$. On montre de même que $b = b'$ et $c = c'$. Les quatre faces triangulaires sont nécessairement isométriques.



66-2 *(de Jean-Christophe Laugier)* :
n joueurs ($n \geq 2$) se sont affrontés deux à deux au cours d'un tournoi. Il n'y a pas eu de match nul. Montrer que l'on peut ranger les joueurs en une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, le joueur x_i a battu le joueur x_{i+1}.

Solution de l'auteur :
Notons $x \succ y$ la relation « *x a battu y ».* Démontrons l'énoncé par récurrence sur n. Il est évidemment vrai pour $n = 2$. Supposons-le établi jusqu'à l'ordre n ($n > 1$). Soit donc un tournoi de $n + 1$ joueurs numérotés 1, 2, …, $n + 1$. Considérons le joueur $n + 1$. S'il a battu tous les autres, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut ranger les joueurs 1, 2,…, n en une suite x_1, x_2,…, x_n telle que $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n$; on a alors $n+1 \succ x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n$. De même, s'il a été battu par tous les autres, on a

$x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_n \succ n+1$. Si enfin le joueur n + 1 a été battu par k joueurs et en a battu $n - k$ autres $(1 \le k \le n-1)$, on peut ranger d'après l'hypothèse de récurrence les k joueurs ayant battu n + 1 en une suite $x_1, x_2, \ldots, x_k$ telle que $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k$ et les n-k autres en une suite $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. telle que $x_{k+1} \succ x_{k+2} \succ ... \succ x_n$;

on a alors $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k \succ n+1 \succ x_{k+1} \succ x_{k+2} \succ ... \succ x_n$ et ceci achève la démonstration.

Autre solution de Frédéric de Ligt :

Pour n = 2 la propriété est claire. Prenons alors n > 2. On raisonne par l'absurde. Supposons que l'on puisse établir un classement $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k$ d'au maximum k joueurs, avec $2 \le k < n$. Il y a donc au moins un joueur distinct des k joueurs précédents. Notons-le a. On ne peut avoir $a \succ x_1$ car alors $a \succ x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k$, et on pourrait classer k +1 joueurs. On a donc $x_1 \succ a$. Mais on ne peut avoir $a \succ x_2$ car on aurait un classement de k + 1 joueurs : $x_1 \succ a \succ x_2 \succ ... \succ x_k$. Donc $x_1 \succ x_2 \succ a$ et on continue le même raisonnement avec x_3 et ainsi de suite. Finalement on obtient nécessairement $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_k \succ a$ qui est aussi un classement de k + 1 joueurs. Contradiction.

A noter que cette propriété a été établie par le mathématicien hongrois Laszlo Rédei en 1934.

67-2 *(de Frédéric de Ligt)* :

On a l'identité $(n + 2)n + 1 = (n + 1)^2$; cela suggère l'idée de s'intéresser aux suites (a_n) qui vérifient $a_{n+2}a_n + 1 = a_{n+1}^2$. En particulier, pourriez-vous montrer qu'à partir de $a_1 = 1$ et de $a_2 = m$ avec m entier supérieur à 1, la suite (a_n) ne produit que des entiers naturels ?

Solution de l'auteur :

On suppose que m est un entier plus grand que 1. On considère la suite $(v_n)_{n\ge 0}$ définie par $v_{n+2} = mv_{n+1} - v_n$ avec $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. On observe que $v_2 = m$. Il va s'agir de prouver que les suites $(v_n)_{n\ge 1}$ et $(a_n)_{n\ge 1}$ coïncident. On s'intéresse pour cela à la matrice $Q_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} & -v_{n+1} \\ v_{n+1} & -v_n \end{pmatrix}$, qui se particularise en $Q_0 = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec det (Q_0) = 1. Un raisonnement par récurrence permet de montrer que $Q_n = Q_0^{n+1}$:

La relation est vraie au rang 0. Soit n un entier positif, supposons que $Q_n = Q_0^{n+1}$.

On a alors $Q_0^{n+2} = Q_0^{n+1}Q_0 = Q_nQ_0 = \begin{pmatrix} v_{n+2} & -v_{n+1} \\ v_{n+1} & -v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mv_{n+2} - v_{n+1} & -v_{n+2} \\ mv_{n+1} - v_n & -v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{n+3} & -v_{n+2} \\ v_{n+2} & -v_{n+1} \end{pmatrix} = Q_{n+1}$.

En utilisant la propriété des déterminants : det (AB) = det (A) det (B), on a donc det (Q_n) = det (Q_0^{n+1}) = det $(Q_0)^{n+1}$ = 1.

Par conséquent det (Q_n) = $-v_{n+2}v_n + v_{n+1}^2 = 1$. Les suites $(v_n)_{n\ge 1}$ et $(a_n)_{n\ge 1}$ sont donc égales terme à terme. Par ailleurs, il est clair, en observant la relation de récurrence entre les termes de la suite $(v_n)_{n\ge 0}$ et ses deux premiers termes, que tous les termes de cette suite sont des entiers. On peut même assurer que ce sont des entiers naturels. Pour cela prouvons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} > v_n \ge 0$. Quand n = 0, on a bien $v_2 > v_1 \ge 0$. Soit n un entier naturel, supposons que $v_{n+1} > v_n \ge 0$, on a alors $v_{n+2} - v_{n+1} = (m-1)v_{n+1} - v_n \ge v_{n+1} - v_n > 0$. La suite $(a_n)_{n\ge 1}$ est donc bien constituée d'entiers naturels dès que m est un entier supérieur à 1.

Pour m = 2, cette suite fournit les entiers naturels non nuls.

Pour m =3, elle fait apparaître les termes de rang pair de la suite de Fibonacci définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ avec $F_1 = F_2 = 1$, c'est-à-dire que $a_n = F_{2n}$ pour tout entier naturel n non nul. En effet, on a tout d'abord $a_1 = F_2 = 1$, $a_2 = F_4 = 3$ et, en partant de $F_{2n+4} = F_{2n+3} + F_{2n+2}$; $F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$; $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$, on tire $F_{2n+4} - F_{2n+2} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$ puis $F_{2n+4} - 2F_{2n+2} = F_{2n+2} - F_{2n}$ et enfin $F_{2n+4} = 3F_{2n+2} - F_{2n}$.

68-2 *(de Louis Rivoallan)* :

Voici un petit exercice de niveau Troisième, Seconde. ABCD est un trapèze rectangle en A et D. On veut tracer le point G sur (AD) tel que BG = GC. Bien sûr, vous avez tout de suite pensé à prendre l'intersection de la médiatrice de [BC] avec la droite (AD). Mais voici ce qu'a imaginé un élève. Il trace B' et C' symétriques de B et C par rapport à (AD), puis il trace les médiatrices de [B'C] et de [BC']. Elles se coupent en G affirme-t-il. A-t-il raison ?

Solution de Frédéric de Ligt :

On note O l'intersection de (AD) avec la médiatrice de [B'C]. On a donc OB' = OC. Par conservation de la distance par symétrie on a aussi OB = OB', d'où OB = OC et donc G = O. De même, si on note O' l'intersection de (AD) avec la médiatrice de [BC'], on a O'B = O'C = O'C', d'où O'B = O'C et on a aussi O' = G. L'affirmation de l'élève est donc légitime.