RU - BRI - COL AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Pour ouvrir la rubrique, voici un texte de **Serge Parpay**.

Loi de composition des vitesses en relativité

1) Composition des vitesses :

La vitesse de la lumière c est une vitesse limite. Soit u la vitesse d'un mobile, on a alors $|u| < c$, ce qui peut s'écrire $|u/c| < 1$. En relativité restreinte, soit deux vitesses u et v, la loi de composition de ces deux vitesses est notée $\oplus$.

On a $u \oplus v = \dfrac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$, soit encore $u \oplus v = c\,\dfrac{\dfrac{u}{c}+\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{uv}{cc}}$. En prenant comme unité de vitesse la vitesse limite de la lumière, ce qui revient à faire c = 1 dans l'expression précédente, on a : $u \oplus v = \dfrac{u+v}{1+uv}$ (1).

$|u| < 1$, $|v| < 1$, donc $|uv| < 1$; d'où : $1 + u > 0$; $1 - u > 0$; $1 + v > 0$; $1 - v > 0$ et $1 + uv > 0$.

Posons $w = u \oplus v$: $1+w=\dfrac{(1+u)(1+v)}{1+uv}$ et $1-w=\dfrac{(1-u)(1-v)}{1+uv}$; par suite $1 + w > 0$ et $1 - w > 0$, soit $|w| < 1$.

L'opération $\oplus$ est une loi de composition interne.

2) Loi de groupe :

$(\,]-1\,;\,1[\,,\ \oplus)$ est un groupe commutatif : la loi est commutative ; la loi est associative car

$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w) = \dfrac{u+v+w+uvw}{1+uv+vw+wu}$; 0 est l'élément neutre ; tout élément u a pour inverse –u.

3) Un isomorphisme de groupe :

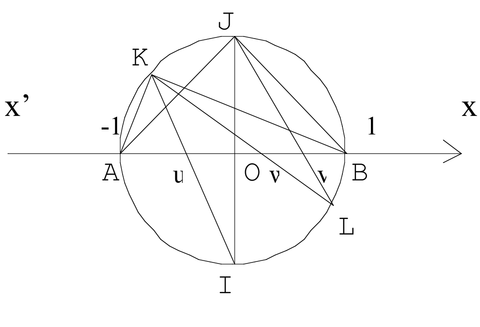
Compte tenu des calculs précédents $w = u \oplus v$ équivaut à $\dfrac{1+w}{1-w} = \dfrac{1+u}{1-u} \oplus \dfrac{1+v}{1-v}$ (2) et par suite

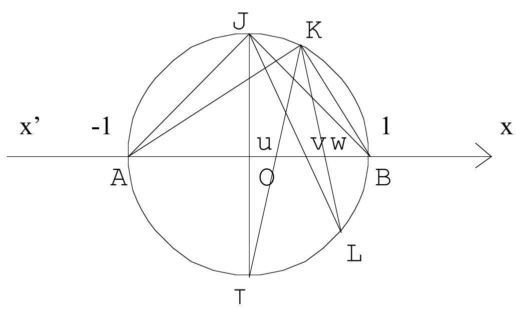
$\ln\dfrac{1+w}{1-w} = \ln\dfrac{1+u}{1-u} + \ln\dfrac{1+v}{1-v}$ (3). En multipliant les deux membres de (3) par 1/2, l'expression devient :

Arg th w = Arg th u + Arg th v, soit, en posant Arg th x = X, W = U + V. La fonction th établit un isomorphisme de groupe de ($\mathbf{R}$, +) sur ( ]-1 , 1[,   ).

4) Construction graphique :

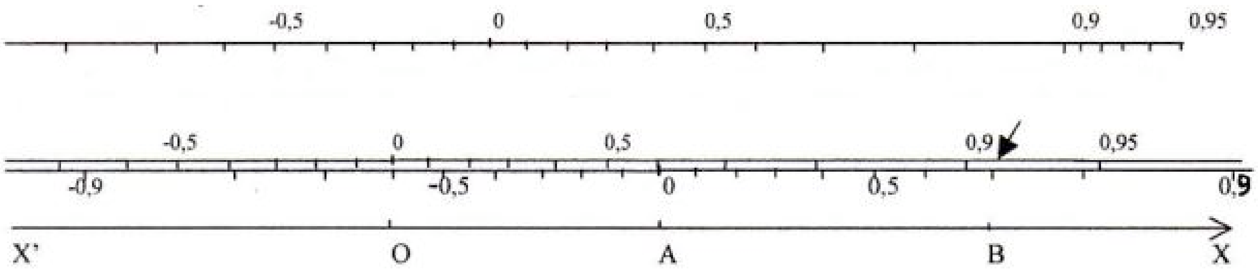
D'après (2), on a $\dfrac{w+1}{w-1} \times \dfrac{u-1}{u+1} = \dfrac{v+1}{v-1} \times \dfrac{0-1}{0+1}$, d'où l'égalité (-1, 1, u, w) = (-1, 1, 0, v) des rapports anharmoniques. On peut en déduire une « construction graphique » : sur un axe x'x d'origine O on place les points A(-1) et B(+1). Sur le cercle de diamètre AB on place deux points I et J diamétralement opposés (on a choisi IJ perpendiculaire à AB, mais on pourrait prendre tout autre diamètre IJ différent de AB). On place sur l'axe x'x les points d'abscisses u et v. On détermine ainsi le point K et le point L (voir figures). KL coupe AB au point d'abscisse w (les faisceaux des quatre droites passant par K et des quatre droites passant par J ont même rapport anharmonique). On obtient ainsi w.





5) Une règle à calculs pour les vitesses :

Posons $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$. D'après (3), $f(u \oplus v) = f(u) + f(v)$. Cette égalité permet de réaliser une « règle à calculs » pour ces vitesses. Sur un axe x'x seront portés les graduations -0,9 ; -0,8 ; … ; -0,1 ; … ; 0 ; 0,1 ; … ; 0,8 ; 0,9 ; … aux points d'abscisses f(-0,9) ; f(-0,8) ; … ; f(-0,1) ; … ; f(0) ; f(0,1) ; … ; f(0,8) ; f(0,9) ; …. On obtient la 'règle' ci-dessous. La représentation est partielle ; la règle ne peut être représentée complètement : on ne peut pas marquer les graduations -1 et 1 puisque $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$; pour avoir plus de précision dans le calcul, il faudrait des divisions intermédiaires. Pour calculer u $\oplus$ v, on dispose de deux règles identiques coulissantes l'une sur l'autre. Soit à calculer w = 0,6 $\oplus$ 0,7 : le point O de la règle inférieure est placé sous le point 0,6 de la règle supérieure. En face du point 0,7 de cette règle inférieure, on lit la valeur w sur la règle supérieure (voir la flèche sur le dessin) : w $\approx$ 0,915 (le calcul donne 0,9154…). Justification : en se reportant à l'axe X'X, on a $\overline{OB} = \overline{OA}+\overline{AB}$, mais $\overline{OA}$ = f(0,6), déterminé par la règle supérieure, $\overline{AB}$ = f(0,7), déterminé par la règle inférieure ; par suite $\overline{OB}$ = f(0,6) + f(0,7) = f(0,6   0,7). Le résultat w = 0,6 $\oplus$ 0,7 est bien celui indiqué par la flèche sur la règle supérieure.



Références :
La relativité. Paul COUDERC. Que sais-je n°37. 1949.
Vitesse et univers relativiste. Jean ABELE et Pierre MALVAUX. SEDES. 1954.

Des problèmes

68-1 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Problème posé par Jacques Hadamard en 1885 dans le Journal de Mathématiques élémentaires.
Soit ABC un triangle d'angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$; notons G le centre de gravité, A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. Les angles entre les médianes sont donnés par les formules :

$3\cot \widehat{B'GC'} = \cot \hat{A} - 2\cot \hat{B} - 2\cot \hat{C}$

$3\cot \widehat{A'GC'} = \cot \hat{B} - 2\cot \hat{C} - 2\cot \hat{A}$

$3\cot \widehat{A'GB'} = \cot \hat{C} - 2\cot \hat{A} - 2\cot \hat{B}$

68-2 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Voici un petit exercice de niveau troisième, seconde. ABCD est un trapèze rectangle en A et D. On veut tracer le point G sur [AD] tel que BG = GC. Bien sûr, vous avez tout de suite pensé à prendre l'intersection de la médiatrice de [BC] avec le segment [AD]. Mais voici ce qu'a imaginé un élève. Il trace B' et C' symétriques de B et C par rapport à (AD), puis il trace les médiatrices de [B'C] et de [BC']. Elles se coupent en G affirme-t-il. A-t-il raison ?

68-3 *de Gilles Auriault (Oslo)* :
ABCD est un quadrilatère convexe. Le problème consiste à partager ce quadrilatère en quatre quadrilatères de même aire qui ont pour sommet commun le point O. O est l'intersection de deux droites dont chacune est parallèle à une diagonale du quadrilatère ABCD et passe par le milieu de l'autre.

68-4 *de Jacques Chayé (Poitiers) :*

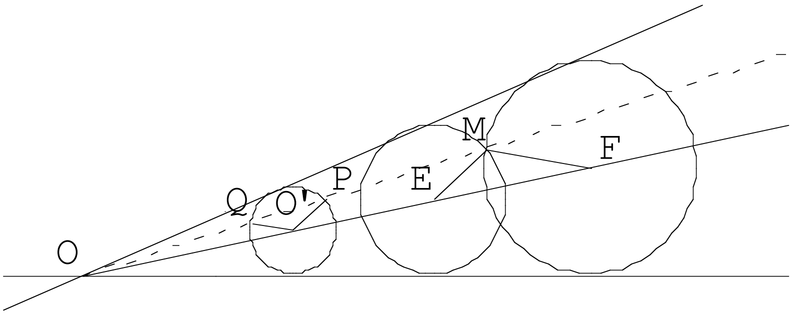
Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle et soit $S = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$. Démontrer que $\frac{3}{2} \le S \le 2$.

Des solutions

64-1 *(Ex.23, p.79, Magnard 4^e, avril 2002)* :
Deux droites sécantes et un point M extérieur à ces deux droites sont donnés. Construire un cercle tangent aux deux droites et passant par le point M. Une méthode niveau 4ème ?

Solution de Frédéric de Ligt :

On note O le point d'intersection des deux droites sécantes. On trace la demi-droite bissectrice du secteur angulaire contenant le point M. On choisit un point O' sur cette demi-droite (différent de O) et on construit le cercle tangent aux deux droites et centré en O'. La demi-droite [OM) coupe ce cercle en deux points P et Q. La parallèle à (O'P) passant par M et la parallèle à (O'Q) passant par M coupent respectivement la demi-droite bissectrice en E et F. Les points E et F sont finalement les centres des deux cercles qui répondent au problème posé.



En collège on peut justifier avec le théorème de Thalès la position du point E : On considère les triangles semblables OO'P et OEM puis les triangles semblables OO'H et OEH' rectangles respectivement en H et H', H et H' appartenant au même côté du secteur angulaire. On procède de même pour justifier la position du point F.

64-3 *(Thierry Sageaux)* :
Trouver tous les couples d'entiers (a, b) non triviaux vérifiant $a^{b^2} = b^a$.

Solution de Frédéric de Ligt :

Si $a = 1$ alors $b = 1$ et réciproquement, (1 ; 1) est bien une solution de l'équation. On suppose désormais que a et b sont au moins égaux à 2. $a^{b^2} = b^a$ (1) $\Leftrightarrow (\frac{a^b}{b})^b = b^{a-b}$; comme $a^b \geq 2^b > b$ alors $\frac{a^b}{b} > 1$ donc $a - b > 0$. On obtient une équation équivalente à (1) en divisant ses deux membres par b^{b^2} : $(\frac{a}{b})^{b^2} = b^{a-b^2}$ (2). Comme $a > b$ alors $\frac{a}{b} > 1$ et donc $a - b^2 > 0$ et $\frac{a}{b}$ est un entier. Posons alors $a = tb$ avec t entier au moins égal à 2. L'équation (2) prend alors la forme $t^{b^2} = b^{tb-b^2}$ ou de façon équivalente $t^b = b^{t-b}$ et en divisant les deux membres par b^b on obtient $\left(\frac{t}{b}\right)^b = b^{t-2b}$ (3). Comme $a - b^2 > 0$ alors $t > b$, donc $\frac{t}{b} > 1$ par conséquent $t - 2b > 0$ et finalement $\frac{t}{b} > 2$. Posons maintenant $t = nb$ avec n entier au moins égal à 3. L'équation (3) devient alors $n^b = b^{bn-2b}$ ou de façon équivalente $n = b^{n-2}$. Pour $n = 3$, $b = 3$, $t = 9$, $a = 27$. Pour $n = 4$, $b = 2$, $t = 8$, $a = 16$. Montrons pour finir qu'il n'y a pas de solution pour $n \geq 5$. Pour cela prouvons par récurrence que, pour $n \geq 5$, $2^n > 4n$. Pour $n = 5$ cela est vrai. Soit $n \geq 5$, si $2^n > 4n$ alors $2^{n+1} > 2^n + 4 > 4(n+1)$ car $2^{n+1} - 2^n > 4$. Donc pour $n \geq 5$, $2^{n-2} > n$; comme $b^{n-2} \geq 2^{n-2}$ alors $b^{n-2} > n$. Il n'y a finalement que trois couples (a ; b) solutions de l'équation (1) : (1 ; 1) ; (27 ; 3) ; (16 ; 2).

66-1 *(Louis Rivoallan)* :
Montrer que 1 est valeur d'adhérence de la suite de terme général $\cos^n n$.

Solution de Jean-Christophe Laugier :

Soit $(\frac{p_n}{q_n})$ la suite des réduites du développement en fractions continuées de $\frac{1}{2\pi}$. On a donc $\left|\frac{1}{2\pi} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$. Soit $\left|q_n - 2\pi p_n\right| < \frac{2\pi}{q_n}$. Donc, pour n assez grand, $\cos q_n = \cos(q_n - 2\pi p_n) > \cos(\frac{2\pi}{q_n})$. On montre d'autre part (développement limité d'une fonction composée) que $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ (x voisin de 0). D'où $\ln(\cos(\frac{2\pi}{q_n})) = -\frac{2\pi^2}{q_n^2} + o(\frac{1}{q_n^2})$ et par suite $q_n \ln(\cos(\frac{2\pi}{q_n})) = -\frac{2\pi^2}{q_n} + o(\frac{1}{q_n})$. Donc $\lim_{n\to+\infty} q_n \ln(\cos(\frac{2\pi}{q_n})) = 0$ soit $\lim_{n\to+\infty} (\cos(\frac{2\pi}{q_n}))^{q_n} = 1$.

Comme $1 > (\cos q_n)^{q_n} > (\cos(\frac{2\pi}{q_n}))^{q_n}$ on a $\lim_{n\to+\infty} (\cos q_n)^{q_n} = 1$. Cela prouve que 1 est valeur d'adhérence de la suite $(\cos q_n)^{q_n}$.