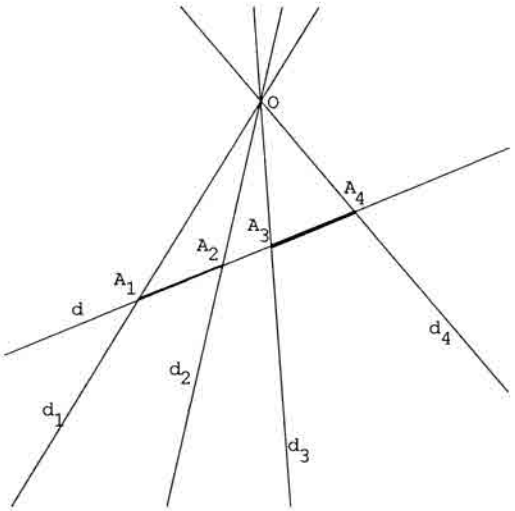
RU - BRI - COL AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Des problèmes

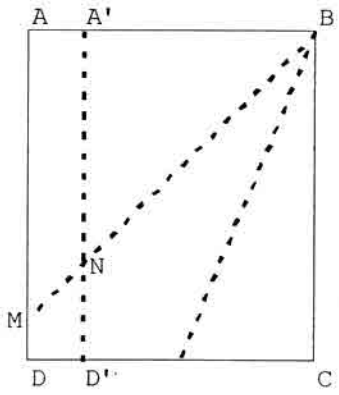
67-1 *de Serge Parpay (Niort)* :
Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont concourantes au point O. Construire une droite d qui coupe ces quatre droites respectivement en A_1, A_2, A_3 et A_4 de telle façon que $A_1A_2 = A_3A_4$.



67-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :

On a l'identité $(n + 2)n + 1 = (n + 1)^2$; cela suggère l'idée de s'intéresser aux suites (a_n) qui vérifient $a_{n+2}a_n + 1 = a_{n+1}^2$. En particulier, pourriez-vous montrer, qu'à partir de $a_1 = 1$ et de $a_2 = m$ avec m entier supérieur à 1, la suite (a_n) ne produit que des entiers naturels ?

67-3 *extrait du livre « Le fabuleux destin de √2 » par Benoît Rittaud (éditions Le Pommier, 2006, p.293)* :
Soit ABCD un rectangle initial quelconque. Amenons par pliage le côté [AB] sur le côté [BC], puis déplions : le segment qui marque le pli est noté [BM]. Plions ensuite le côté [BC] sur le segment [BM], ce qui amène le point C en un point noté N, puis déplions à nouveau. La parallèle au côté [AD] passant par N (qui se construit elle aussi par pliage) coupe les côtés [AB] et [CD] respectivement en A' et D', et le rectangle A'BCD' est un rectangle dont le rapport longueur / largeur est de √2.
A prouver !
Un livre très riche que je conseille vivement à tous les collègues. Vous pensiez tout connaître de ce nombre familier, « Le fabuleux destin de √2 » vous fera changer d'avis.



Des solutions

62-4 *(cité par Dominique Roux dans sa conférence à l'IREM le 3 juin 2005)* :

Soit ABC un triangle tel que AB = AC et $\widehat{BAC} = 20°$. On construit D sur [AC] tel que $\widehat{CBD} = 60°$, et E sur [AB] tel que $\widehat{BCE} = 50°$. Calculer l'angle $\widehat{BDE}$.

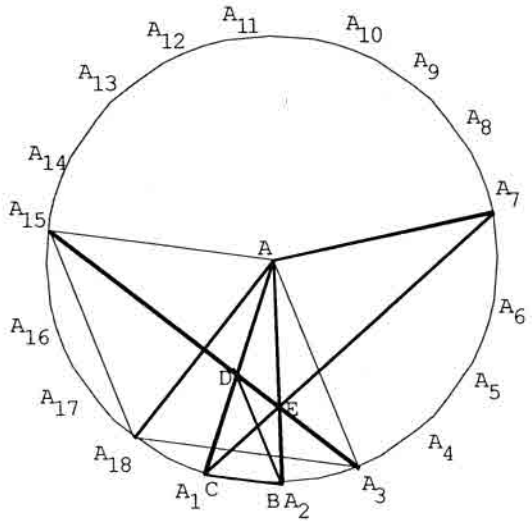
Solution de Frédéric de Ligt :

Le triangle ABC étant isocèle en A, il est clair que $\widehat{EBD} = 20°$ et que $\widehat{ECD} = 30°$. Ce triangle ABC représente une des dix huit portions d'un polygone régulier à 18 côtés dont le centre est A. Nommons ce polygone $A_1 \ldots A_{18}$ en convenant que $A_1 = C$ et $A_2 = B$. Il s'agit de montrer en premier lieu que la corde $[A_3A_{15}]$ coupe ce triangle aux points E et D.

Les cordes $[A_3A_{15}]$ et $[A_1A_7]$ sont symétriques par rapport à (AA_2) et se coupent donc sur $[AA_2]$. Comme $\widehat{A_1AA_7} = 120°$, $\widehat{AA_1A_7} = 30°$ et donc les cordes $[A_3A_{15}]$ et $[A_1A_7]$ se coupent bien au point E. Les triangles $AA_{15}A_{18}$ et AA_3A_{18} sont tous deux équilatéraux, $AA_{15}A_{18}A_3$ est donc un losange. La diagonale $[A_3A_{15}]$ est sur la médiatrice de la diagonale $[AA_{18}]$; par conséquent, si on note provisoirement M le point d'intersection de $[A_{15}A_3]$ et de $[AA_1]$, $MA = MA_{18}$. Comme par ailleurs $MA_{18} = MA_2$, on en déduit que $MA = MA_2$. Le triangle AMA_2 est donc isocèle en M, et $\widehat{MAA_2} = \widehat{MA_2A} = 20°$. D'après l'énoncé, le point M se confond donc avec le point D.

La corde $[A_3A_{15}]$ est bissectrice de l'angle $\widehat{ADA_{18}}$, par conséquent $\widehat{ADA_{15}}=70°$, on en déduit son angle opposé $\widehat{EDA_1}=70°$. L'angle $\widehat{ADA_2}$ valant 140°, son supplémentaire $\widehat{A_2DA_1}$ vaut donc 40°.

On trouve finalement $\widehat{A_2DE} = 70° - 40° = 30°$.



63-1. *Un prolongement de l'exercice 56-4 proposé par Jacques Chayé* :

Un point A est fixé à l'intérieur d'un cercle. Deux droites perpendiculaires pivotent autour de A ; la première coupe le cercle en M et M', la seconde en N et N'. La tangente en M et la tangente en M' se coupent en T_1. La tangente en N et la tangente en N' se coupent en T_2. La tangente en M et la tangente en N se coupent en U_1. La tangente en M' et la tangente en N' se coupent en U_2. La tangente en M et la tangente en N' se coupent en U_3. La tangente en M' et la tangente en N se coupent en U_4. Quels sont les ensembles de points décrits par les points T_1, T_2, U_1, U_2, U_3, U_4 ?

Solution de l'auteur :

Ensemble décrit par T_1 et T_2 : c'est, bien sûr, la polaire de A par rapport au cercle (figure 1).

Ensemble décrit par U_1 : Soit I le milieu de [MN] ; on a vu à l'exercice 56-4 que, r étant le rayon du cercle initial, I décrit un cercle de centre P et de rayon $(r^2 - 2AP^2) / 2$.

Or, dans le triangle OMU_1 rectangle en M : $\overline{OI} \times \overline{OU_1} = OM^2 = r^2$. On passe donc de I à U_1 par l'inversion de centre O et de puissance r^2. On en déduit que U_1 décrit l'image du cercle décrit par I. Pour les mêmes raisons, U_2, U_3 et U_4 décrivent eux aussi ce cercle (figure 2)

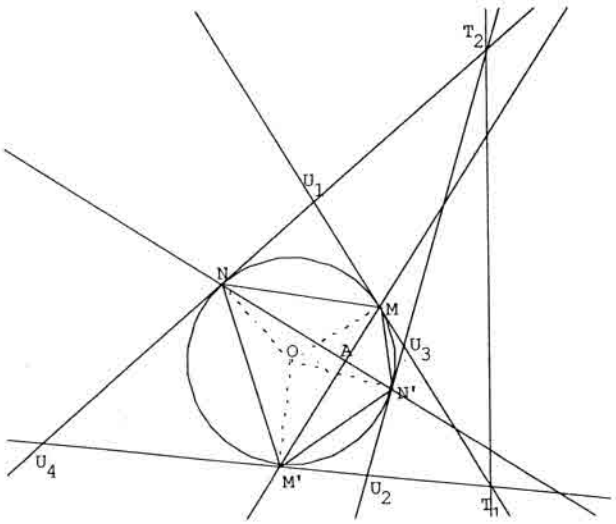


Figure 1

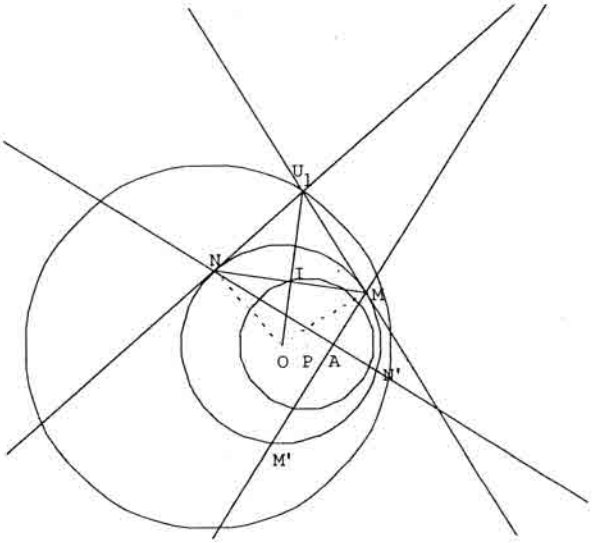


figure 2

65-3 (*Jean-Christophe Laugier*) :
Déterminer des entiers A et B tels que A/B = 0,2006… avec B minimal.

Solution de Serge Parpay :

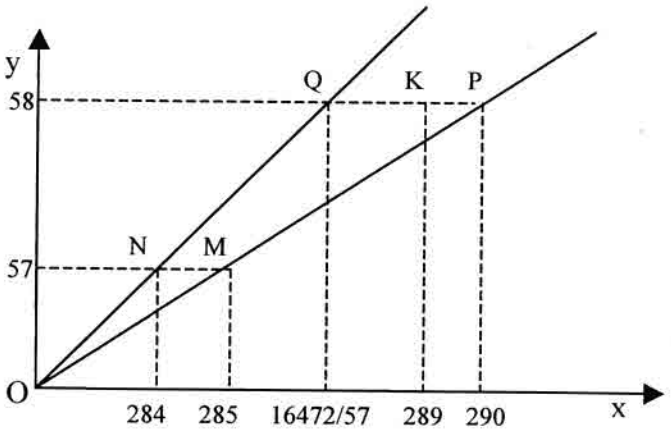
Première solution :
Notation : $[\alpha]$ *est la partie entière du nombre positif* α.
La fraction A/B doit vérifier la double inégalité 0,2006 < A/B < 0,2007 et B doit être minimal. Soit une fraction a/b vérifiant 2006/10000 < a/b < 2007/10000 (1). $b < \frac{10000}{2006}a < 5a$: On peut poser b = 5a – p avec p entier et 0 < p< 5a.

(1) prend alors la forme $\frac{2006}{10000} < \frac{a}{5a\text{-}p} < \frac{2007}{10000}$. On en déduit la double inégalité : $\frac{2007}{35}p < a < \frac{2006}{30}p$.

Comme a est un entier : $\left[\frac{2007}{35}p\right]+1 \le a \le \left[\frac{2006}{30}p\right]$.

Si p = 1, $58 \le a \le 66$ et donc $289 \le 5a - 1 \le 329$, si $p \ge 2$, $a > \frac{2007}{35}p \ge \frac{4014}{35} > 114$ et $5a - p > 10000\times114/2007 > 568$.
La plus petite valeur de 5a – p est égale à 289 avec a = 58 et p = 1.
Les valeurs cherchées sont par conséquent A = 58, B = 289, avec 58/289 = 0,2006920….

Deuxième solution :
Notation : Soit une fraction α/β telle que $\alpha < \beta$. *Cette fraction admet un développement en fraction continue. On adoptera la notation* $\alpha/\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. *Par exemple* 57 / 284 = 1 / (4 + 1 / (1 + 1 / 56)) *s'écrira* 57 / 284 = (4, 1, 56).
La fraction A/B doit vérifier la double inégalité 0,2006 < A/B < 0,2007 avec B minimal. Soit une fraction a/b vérifiant 2006/10000 < a/b < 2007/10000. On a 2006/10000 = (4, 1, 65, 1, 6, 2) ; les premières réduites sont : (4, 1) = 1/5 et (4, 1, 65) = 66/329. Par ailleurs 2007/10000 = (4, 1, 56, 1, 11) ; les premières réduites sont : (4, 1) = 1 /5 et (4, 1, 56) = 57/284. Par suite 1/5 < a/b < 57/284, soit 57/285 < a/b < 57/284.
Soit le repère (Ox, Oy), une fraction α / β sera représentée par le point de coordonnées $(\beta ; \alpha)$.



Pour des raisons graphiques, les longueurs des graduations ne sont pas respectées. Le schéma n'est là que pour aider à la lecture du texte.

On utilise les points M et N représentant les fractions 57/285 et 57/284. M (285 ; 57) : le coefficient directeur de (OM) vaut 1/5. N (284 ; 57) : le coefficient directeur de (ON) vaut 57/284. La fraction A/B recherchée sera représentée par un point Ψ(B ; A), situé nécessairement dans l'angle $\widehat{MON}$. Il y a 57 points de coordonnées entières sur le segment [OM[. Il y a un point de coordonnées entières sur le segment [MN[, le point M. Il y a un point de coordonnées entières sur le segment [NO[, le point N. Donc sur le pourtour du triangle OMN, il y a 59 points de coordonnées entières. L'aire du triangle étant égale à 57/2, *n* étant le nombre de points de coordonnées entières intérieurs au triangle, on a 57/2 = 59/2 + *n* – 1 (théorème de Pick). Donc *n* = 0, par suite le point Ψ ne peut être situé dans le triangle OMN. Soit le point P (290 ; 58) sur la droite (OM) et Q (16472/57 ; 58) sur la droite (ON) : 288 < 16472/57 < 289 < 290, le point K(289 ; 58) est le point de coordonnées entières d'abscisse minimum situé dans l'angle $\widehat{MON}$.
Comme on a de plus 0,2006 < 58/289 <0,2007 ; le point K est le point Ψ recherché. Les valeurs cherchées sont par conséquent A = 58, B = 289, avec 58/289 = 0,2006920….

65-4 (*de Jean-Christophe Laugier*) :
Existe-t-il une fonction de **R** dans **R** non constante telle que $f(x + 1) = f(x)$ et $f(x + \sqrt{2}) = f(x)$?

Solution de Serge Parpay :
Soit E l'ensemble des nombres s'écrivant $a + b\sqrt{2}$ avec *a* et *b* entiers relatifs. Soit la fonction numérique de **R** dans **R** telle que, si $x \in E$, $f(x) = 1$ et si $x \notin E$, $f(x) = 0$. *m* et *n* étant des entiers, $f(x + n + m\sqrt{2}) = f(x)$. La fonction f répond à la question posée.