MATh.en.JEANS 2005-2006 :
« Les fractions égyptiennes »

Pour la 3ème année des clubs mathématiques ont été mis en place dans l'Académie dans le cadre MATh.en.JEANS (**M**éthode d'**A**pprentissage des **Th**éories **en** **J**umelant des **E**tablissements pour une **A**pproche **N**ouvelle du **S**avoir).

Déroulement de l'année

4 lycées de l'Académie (Le Bois d'Amour de Poitiers, le LISA d'Angoulême, Marcel Dassault de Rochefort, Saint-Joseph de Bressuire) se sont « jumelés » pour conduire une recherche mathématique. Lors de rencontres de coordination (juillet et août) Camille Laurent chercheur à l'Université de Poitiers a proposé deux sujets, le groupe a retenu celui sur « les fractions égyptiennes ».

Puis une présentation a été faite par Camille Laurent en septembre dans chacun des 4 lycées ; elle a été l'occasion, de façon diversifiée, d'échanger avec les élèves sur les mathématiques, la recherche, l'université. Dans la foulée les élèves se sont retrouvés à raison d'une rencontre par semaine. Les groupes ont aussi échangé, à l'aide d'un forum par Internet, entre eux et avec le chercheur.

Le premier « séminaire » fin novembre à Poitiers a permis à chaque groupe d'exposer ses premières recherches : d'une part ces exposés ont permis de consolider la maîtrise des méthodes (Fibonacci et « Matching pair »), d'autre part les questions et pistes évoquées ont été autant d'idées pour les autres groupes. Le chercheur a proposé dans la foulée 5 pistes de recherche, à charge pour chaque groupe de se focaliser sur l'une d'elle.

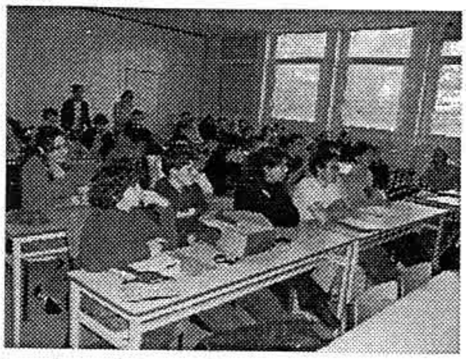
Les semaines qui ont suivi ont souvent été plus difficiles, chaque groupe étant sur une recherche spécifique non balisée. Le second séminaire, début mars, a permis à chaque groupe d'exposer ses avancées. Les semaines qui ont suivi ont été plus chargées : il fallait mettre au point une intervention pour le colloque à Paris à la Cité des Sciences et de l'industrie de la Villette les vendredi 31 mars, samedi et dimanche 1 et 2 avril.

Lors de ce colloque, chaque groupe a été chargé d'animer 2 ou 3 fois en 15 minutes l'un des 4 pôles prévus. D'autre part une intervention commune de 20 minutes a été montée et présentée en amphi. Tout en assurant une permanence à un stand, les élèves ont pu aussi découvrir d'autres projets présentés par des groupes d'autres collèges ou lycées ; ils ont pu bénéficier aussi des expositions scientifiques de la Villette.

L'année devrait se terminer par une « publication » : les contraintes sont telles que certains groupes ne peuvent la réaliser ; deux groupes en proposent une ; reste à voir si elles seront acceptées par le comité de lecture de MATh.en.JEANS.

Lycée du Bois d'Amour de Poitiers : (Compte-rendu fait par les élèves)

Le sujet proposé par le chercheur était les fractions égyptiennes. Nous avons commencé par chercher des décompositions de 2 en fractions égyptiennes, ce qui nous a permis de découvrir le matching pair et l'algorithme de Fibonacci.
Après quelques recherches, nous avons rencontré les groupes d'Angoulême, Rochefort et Bressuire qui travaillaient sur le même sujet que nous, à l'université de Poitiers. Lors de cette réunion, Camille Laurent nous a donné plusieurs pistes : les décompositions de 1 à l'aide du matching pair en étudiant le comportement du nombre de termes à la fin de la décomposition (appelé S(x)) - Les entiers parfaits à un millième près - Syracuse et les entiers parfaits sous sa forme égyptienne - codage pour CLE - utilisation du théorème de Bézout.
À Poitiers nous avons choisi 2 thèmes : Bézout et «S(x)».



Premier séminaire à Poiters le 17 - 11 - 05

I - Bézout. *Théorème de Bézout* : Si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors on peut trouver deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$. À partir de là, on en déduit $\frac{a}{b} = \frac{1}{bu} - \frac{v}{u}$ (u doit donc être positif et v négatif). Nous avons d'abord commencé à partir d'un exemple : nous avons essayé de décomposer la fraction $\frac{6}{7}$: $\frac{6}{7} = \frac{1}{42} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$.

À partir de cet exemple, nous avons trouvé une formule permettant de décomposer toute fraction de la forme $\frac{a}{a+1}$:

$\frac{a}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{a-1}{a}$. $a - 1$ et a étant deux entiers consécutifs, on peut réitérer le procédé.

Nous avons ensuite décidé de chercher des décompositions des fractions de la forme $\frac{a}{a+2}$ (avec a impair) :

$\frac{a}{a+2} = \frac{1}{(a+2)\frac{a+1}{2}} + \frac{\frac{a-1}{2}}{\frac{a+1}{2}}$ où $\frac{a-1}{2}$ et $\frac{a+1}{2}$ sont des entiers consécutifs ce qui permet de recommencer le procédé.

À partir de ces deux formules, nous avons essayé d'en déduire une décomposition de toute fraction de la forme $\frac{a}{a+k}$, mais nous avons été confrontés à un problème, et nous n'avons pas pu en conclure de formule générale.
Nous avons donc décidé de reprendre avec les fractions de la forme $\frac{a}{a+3}$ pour lesquelles nous avons trouvé un algorithme de décomposition.

II - S(x). S(x) est le nombre de termes à la fin d'une décomposition de 1 du type $1 = xx\frac{1}{x}$

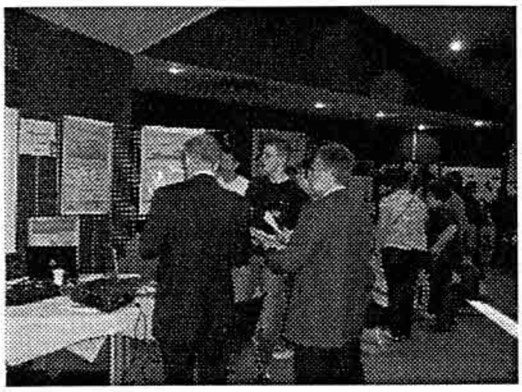
Nous avons commencé par prouver que S(x) = S($2x$), cela nous a permis de n'utiliser que des x impairs par la suite. Nous avons cherché S(x) jusqu'à $x = 33$, et nous avons construit un graphique à l'aide des résultats trouvés, et nous en avons déduit un tableau.
À partir de là deux conjectures sont apparues :
- Tout d'abord que $S(2^k+1) = 2^k+1$ (k entier naturel)
- Puis que $S(2^k-1) = 2k-1$ (k entier naturel)

Ces deux résultats ont été prouvés. Pour cela nous avons d'abord travaillé avec des exemples pour ensuite passer à la généralisation.
Le 2 mars, nous avons à nouveau rencontré Camille et les autres lycées travaillant sur le même sujet que nous sur le site du Futuroscope, à la faculté de mathématiques.
Le reste du temps à été consacré à l'élaboration du diaporama présenté au congrès à La Villette.
Nous avons ensuite présenté notre travail devant quelques professeurs de sciences de notre lycée.

Lycée de l'Image et du Son d'Angoulême

La présentation initiale du projet a été faite au sein de l'amphithéâtre de l'établissement. Les élèves intéressés par le sujet et les élèves des filières scientifiques ont été invités à participer à celle-ci. Environ 100 à 150 élèves sont venus y assister. Deux créneaux horaires leur on été proposés. Un groupe d'une vingtaine d'élèves s'est constitué pour rapidement se stabiliser à 12 élèves qui ont participé toutes les semaines au projet. Le groupe était constitué d'un élève de seconde, 2 élèves de première S et 9 élèves de terminale S.

Les élèves se sont partagés le travail en deux. Un premier groupe a travaillé sur l'algorithme dit de Fibonacci et le second sur la méthode de décomposition dite du « matching pairs ». Les élèves du premier groupe se sont rapidement aperçus que l'algorithme de Fibonacci avait un inconvénient majeur : les dénominateurs des fractions unitaires devenaient vite très grands. Les calculatrices faisant des arrondis, le programme qu'ils avaient implanté sur une calculatrice leur donnait rapidement des décompositions fausses. Les élèves du second groupe ont rapidement obtenu des décompositions de l'entier 1 avec la méthode des « matching pairs » mais ont vite rencontré des problèmes pour la décomposition des entiers supérieurs.
Les questions soulevées furent nombreuses : Peut-on améliorer l'algorithme de Fibonacci pour « contrôler » les dénominateurs des fractions unitaires ? Peut-on connaître le nombre de termes que l'on va obtenir lors d'une décomposition en fraction Egyptienne ? Peut-on à l'aide des différentes décompositions de 1 trouver des décompositions des entiers supérieurs ?...



Participation à Exposciences2006 les 17-19 mai

Ils n'ont bien évidemment pas eu le temps de répondre à toutes ces questions. Ceux qui travaillaient sur la méthode des « matching pairs » ont réussi après différentes tentatives à déterminer plusieurs décompositions de l'entier 2 mais aucune pour les entiers supérieurs. Le groupe qui travaillait sur la méthode de Fibonacci a créé un algorithme utilisant le théorème de Bézout. Ils ont rigoureusement démontré qu'avec cet algorithme, ils étaient capables de décomposer toute fraction de la forme a/b comprise entre 0 et 1 en fraction Egyptienne de façon à ce que tous les dénominateurs soient majorés par b^2 et que deux dénominateurs consécutifs possèdent toujours un diviseur commun.
Ils ont par la suite participé à Exposciences à Poitiers. Leur projet intitulé « Bon Bezout des pharaons » a été primé pour la qualité de la démarche scientifique qui a été mise en place lors de sa construction.

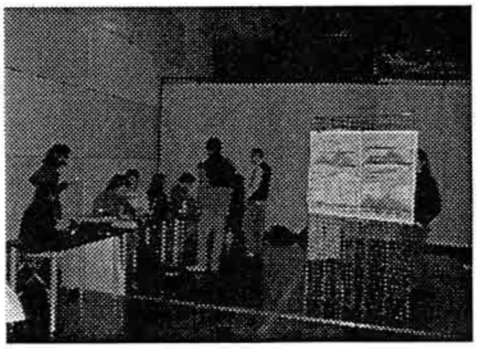
Lycée Marcel Dassault de Rochefort

La présentation du début d'année a rassemblé une vingtaine d'élèves. Rapidement, le groupe s'est stabilisé à 6 élèves : un de seconde, trois de première S et deux de terminale S, qui se sont réunis une fois par semaine, le vendredi entre 13 et 14 heures.
La première étape a consisté à apprivoiser les fractions égyptiennes : vocabulaire, techniques de décomposition (algorithme de Fibonnacci), programmation.
Suite aux pistes de recherche proposées lors du premier séminaire à Poitiers, le groupe a rapidement opté pour la méthode dite des « matching pairs » ou « appariements » qui a été utilisée de façon systématique pour décomposer 1 à partir de l'égalité :

$$1 = p \times \frac{1}{p} .$$

Des exemples ont été traités « à la main » puis nous avons utilisé les compétences d'un programmeur maison pour traiter un grand nombre de données et faire émerger des résultats. On a observé que *lorsque $p = 2^n-1$, il semble que la décomposition finale comporte 2n-1 termes et que cette décomposition se fait en n-1 étapes* puis que *lorsque $p = 2^n+1$, il semble que la décomposition finale comporte p termes et que cette décomposition se fait en n étapes*. Nous avons ensuite démontré la première de ces conjectures.
Forts de ces résultats, nous avons alors essayé d'appliquer la même méthode pour décomposer 2. Très vite, nous nous sommes rendus compte, qu'à moins de « bricoler », nous n'arrivions pas à décomposer 2 avec notre méthode systématique, ceci étant dû à l'apparition de cycles que nous avons baptisés « les cycles maudits ». Là encore, le recours à un programme nous a permis de corroborer nos intuitions, mais nous n'avons pas réussi à établir la démonstration (une piste : 1/ 2 apparaît dans toutes les décompositions).
Puisque nous n'arrivions pas à décomposer 2 on a eu l'idée de s'en rapprocher en essayant de décomposer des fractions du type $\frac{q}{p} = \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}$ q fois, avec q le plus grand possible. D'abord à la main : il y a celles qui marchent et celles qui ne marchent pas. Enfin, « par programmation » en donnant l'instruction au programme d'arrêter dès qu'il y a un cycle.

On a alors mis en évidence une suite $u_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n+1}$ qui semblait être « la plus proche décomposition possible de 2 ». Nous avons étudié cette suite mais n'avons pas réussi à terminer les démonstrations des résultats pressentis.
En effet, nous avons dû stopper les recherches pour mettre en forme l'exposé présenté à la Cité des Sciences, travail (écrit, support informatique et oral) qui a demandé un très lourd investissement de la part des élèves mais qui a permis dans sa partie rodage de faire connaître l'atelier MATh.en.JEANS dans le lycée (exposés dans les classes et lors des portes ouvertes).



Participation au colloque MATh.en.JEANS à Paris les 31 mars, 1 et 2 avril.

Lycée Saint Joseph de Bressuire

Lors de la présentation initiale, une vingtaine d'élèves sont venus découvrir le sujet. Pendant plusieurs semaines, 11 se sont retrouvés régulièrement, puis progressivement le groupe s'est stabilisé à 5 (deux ont décroché dès que le mot « démonstration » a été prononcé, 1 s'est laissé piéger par des recherches unique-

ment orientées sur Internet, 1 autre a du laisser l'atelier par « surcharge » de travail, 2 autres, internes, ont préféré rentrer chez leurs parents le week-end du colloque et se sont ainsi progressivement désinvestis).
Après s'être approprié les trois méthodes de décomposition (méthode égyptienne, méthode de Fibonacci, et méthode « Matching pair »), le groupe s'est lancé dans des calculs à la main, puis a obtenu des résultats à l'aide de programmes faits par eux-mêmes avec une calculatrice ou en langage Php et C.
L'objectif principal étant de décomposer 1 en « fraction égyptienne », ils ont d'abord cherché diverses décompositions, compté le nombre de termes pour essayer d'en dégager un résultat. L'un deux a orienté les recherches vers des décompositions de 1 en imposant le plus petit dénominateur ; ils se sont alors posé trois questions puis ont résolu les deux premières : peut-on obtenir 1 en faisant la somme de fractions unitaires à dénominateurs consécutifs ? Est-on certain, à partir d'une fraction unitaire et en ajoutant suffisamment de telles fractions à dénominateurs consécutifs, d'obtenir une somme supérieure à 1 ? Peut-on décomposer 1 en imposant le plus petit dénominateur ?


« Faites de la science », Poitiers le 01 - 06- 06

Suite à une erreur de programmation, les calculs de cette dernière décomposition ont dû être redisposés en « pyramide », de là est venue une méthode spécifique qui permet de décomposer 1 avec cette contrainte, mais aussi de décomposer tout entier en imposant le plus petit dénominateur. Le programme donne des résultats satisfaisants concernant le nombre de termes et les premières décompositions ; il a été démontré qu'il n'y a pas de collision en un point particulier, mais il reste à démontrer qu'il n'y en a pas ailleurs.
Leur recherche intitulée « Fractions égyptiennes : décomposer tout entier en fraction égyptienne » a été présentée à « Exposciences 2006 » à Poitiers les 17-18-19 mai et au concours « Faites de la science » à l'Université de Poitiers le 1 juin. Elle a été bien appréciée par les jurys en particulier pour la qualité de la démarche scientifique.

Camille Laurent

« Enseignant à l'Université depuis près de sept ans, j'ai toujours été surpris par la passivité de certains étudiants, d'un trop grand nombre d'étudiants devrais-je dire. D'une part, beaucoup ne semblent pas aimer les sciences, (et n'y voient qu'un outil pour devenir cadre, ingénieur ou enseignant, ce qui est d'ailleurs tout à fait estimable). Mais encore et surtout, trop d'étudiants, lesquels acceptent de refaire à l'infini des exercices qu'ils savent déjà faire, refusent de chercher la solution d'un exercice qu'ils ne savent pas faire, considérant sans doute comme inutile de se fatiguer quand je leur donnerai une solution bien ficelée et bien rôtie quelques instants plus tard.
Je dois dire que, heureusement, il y a de très nombreuses exceptions. Mais le seul antidote me semble être d'apprendre aux élèves dès le Lycée cette chose, qui ne s'enseigne d'ailleurs pas, et qui est de savoir chercher ce que l'on ne sait pas. Je dois dire avoir été émerveillé par la ténacité des lycéens que j'ai rencontrés au cours de ce projet, et par leur imagination, qui parfois peut sembler naïve, mais de cette naïveté qui fait se poser les bonnes questions. Je sais que peu d'entre eux sinon aucun, ne deviendra mathématicien, mais je me réjouis de ce qu'ils ne deviendront jamais de ces étudiants dont j'ai médit ci-dessus. Je me suis réjoui surtout pour eux le jour où ils m'ont demandé, comme si j'étais un oracle, si tel algorithme fonctionnait toujours, et où mes collègues et moi ont bien dû répondre : "je ne sais pas, et j'ai eu beau essayer de comprendre, je ne vois pas du tout comment faire" ; ce jour là ils ont forcément compris que, parfois, on ne peut pas attendre qu'une solution salvatrice tombe à point. Je dois d'ailleurs les féliciter pour avoir su trouver quelques résultats ou quelques conjectures qui sont à mon avis nouvelles, et qui, partant, devraient porter leurs noms !
Je dois avant tout remercier mes collègues des quatre Lycées, qui ont fait la partie la plus énorme du travail, je ne suis intervenu, à vrai dire, que tout à fait au début, et tout à fait à la fin. »

À suivre...
L'année 03-04 avait vu le premier projet MATh.en.JEANS dans l'Académie sur « les nombres pointés », l'année 04-05 avait permis à trois lycées d'échanger sur « les codages ». L'année 06-07 est lancée avec, en plus de Camille Laurent, l'appui de Marie-Eve Modolo, sur les sujets « solitons discrets » et « jeux de Nim ».

Marie-Hélène Bertaud, Anne Blein, Maryse Cheymol, Florence Gabarra, Céline Hérault, Cédric Jossier, Loïc Jussiaume, Gilles Maréchal.