Edito

Mathématiques de haut niveau

Le 22 août dernier, lors du 25^{e} congrès international de mathématiques de Madrid, la médaille Fields a été décernée à quatre mathématiciens de moins de 40 ans : les Russes Grigory Perelman et Andreï Okounkov, l'Australien Terence Tao et le Français Wendelin Werner.

G. Perelman a démontré une conjecture émise par Henri Poincaré il y a un siècle : toute variété compacte sans frontière de dimension 3 est homéomorphe à une sphère. Il a même démontré la conjecture de Thurston qui la généralise. Mais, fidèle à son image de misanthrope, il a refusé la médaille, tout comme il avait refusé le million de dollars offert par la fondation Clay pour la résolution de la fameuse conjecture.

W. Werner travaille sur les applications des probabilités en physique et dans d'autres domaines. Il a été récompensé pour ses travaux sur le mouvement brownien et les transitions de phase, apportant semble-t-il aux physiciens une théorie qu'ils pressentaient et désiraient avec impatience.

A. Okounkov est lui aussi un spécialiste de probabilités, qu'il applique aussi bien à la géométrie algébrique (étonnant, non ?) qu'à la physique (chaos, gravitation quantique ...)

T. Tao est un jeune génie des mathématiques. Il a notamment démontré que dans la suite des nombres premiers il existe des progressions arithmétiques de longueur quelconque.

Ces récompenses me suggèrent plusieurs réflexions :

- Les mathématiques sont extraordinairement vivantes et extrêmement utiles. Cela n'étonnera pas nos lecteurs, mais comment le faire sentir à nos élèves, qui n'y voient souvent qu'un savoir figé et vain ?
- Les mathématiciens, comme tous les chercheurs, sont poussés par la passion de comprendre et de découvrir. Mais le savant isolé tel que se voit G. Perelman est une illusion : d'une part la recherche est un travail d'équipe qui s'enrichit des échanges mutuels, d'autre part la société s'empare des découvertes scientifiques pour en tirer le meilleur comme le pire.
- Le haut niveau de l'école mathématique française est confirmé. Il est dû notamment à des institutions comme l'Ecole Normale supérieure, le Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques de Bures-sur-Yvette. Ne boudons pas notre fierté, car notre travail quotidien contribue à ce résultat. Mais comment maintenir le terreau de cette pépinière, avec la diminution dramatique des horaires de mathématiques au collège et au lycée depuis 10 ans ?

Louis-Marie BONNEVAL

SOMMAIRE

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

79 86 17 16

APMEP

Régionale de Poitou-Charentes

n°66

Octobre 2006

Dispensé de timbrage | Poitiers Centre de tri

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

P PRESSE DISTRIBUÉ PAR LA POSTE

DÉPOSÉ LE 02-10-2006

FREDERIC DE LIGT
3 RUE DE LA PIERRIERE
17270 MONTGUYON
0202

APMEP : http://irem.univ-poitiers.fr/apmep
Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Le numéro : 1 € .
Abonnement 1 an (4 numéros) : 3,5 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Louis-Marie BONNEVAL
Comité de rédaction ...	C. BLOCH, S. PARPAY, J. FROMENTIN, F. DE LIGT
Imprimerie	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Editeur	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P.	n° 0508G88007
Dépôt légal	Octobre 2006

Vie de l'Association

Compte rendu du Comité régional du 21 juin 2006

Voici, succinctement, les différents points abordés à l'occasion de ce Comité.

« **Jeux, nombres et formes** » **(Mendès-France) :**
Cette exposition a été très visitée, que ce soient par des classes ou par des individuels.
Trois conférences se sont déroulées dans ce cadre :
Math et jonglerie : sujet intéressant – environ 50 personnes
Harmonie pythagoricienne : un peu décevant.
Enseigner les maths à l'école élémentaire : intéressant – environ 80 personnes.

Expocube
Mendès-France a dupliqué l'*Expocube* mais pas dans sa totalité.
Dominique Gaud propose d'envisager un partenariat entre l'Espace Mendès-France et l'APMEP pour pérenniser tout ce travail. L'APMEP proposerait d'autres thèmes d'expositions et Mendès-France aiderait aux réalisations. On pourrait aussi prendre pour principe que les expositions soient gratuites dans l'académie et payantes hors académie. Un sujet possible d'exposition : « Outils de construction mathématiques ».

Olympiades académiques
Le palmarès a été donné dans Corol'aire n° 65.
Les sujets sont en ligne sur le site académique.

Manuel Bréal Terminale S (enseignement obligatoire)
Le manuel étant épuisé, pour dépanner les élèves, l'APMEP fournira des photocopies du livre au prix coûtant, avec une facture pour que les familles puissent bénéficier du chèque-livre.

Journées de La Rochelle
Le compte-rendu de la réunion du 7 juin est dans Corol'aire n° 65.
Le site public sera http://irem.univ-Poitiers.fr/apmep_journées2008. Mais Samuel Dussubieux travaille à un site réservé à l'équipe organisatrice, qui permette les échanges d'infos de façon rapide et efficace.
Pour les inscriptions, Samuel teste le logiciel (lui signaler les problèmes rencontrés pour s'inscrire aux Journées de Clermont).. Frédéric de Ligt se propose de gérer les inscriptions, à condition de pouvoir le faire depuis chez lui.

Corol'aire
Le numéro de CPPAP est renouvelé pour 2 ans ! Nous profitons donc encore du tarif préférentiel de la Poste.

Rallye
Deux propositions de logo, pour des T-shirts, ont été fournies. Mais le coût est élevé (3000 ? pour 1000 T-shirts). Décision à prendre à la rentrée.
Lors de la prochaine réunion du comité, il doit être discuté de la forme future du Rallye (intégrer les CM2 et les 6^e ?).

Conférences 2006-2007
- octobre : Histoire de la trigonométrie (E. Hébert et Christian Vassard) [*11 octobre à Poitiers*]
- 6 ou 13 décembre (Assemblée générale) : Algèbre lycée-collège (André Pressiat) ?
- 23 janvier : Math babyloniennes (Christine Proust) : J. P. Mercier a pris contact.

Compte-rendu du séminaire national (20-21 mai)
Thème : l'option sciences en 2nde. Que des échos positifs !
Le compte-rendu doit être publié dans le bulletin vert.

Préparation du comité national (24-25 juin)
Frédéric de Ligt et Sébastien Peyrot ont été élus avec **97,67 %** des voix !

Rapport parlementaire J-M. Rolland
Ce ne sont que des propositions. On peut lire l'éditorial de Corol'aire n° 65.

Brochures
Des commandes de brochures ont renouvelé notre stock.
Nous sommes toujours à la recherche des anciens Bulletins verts, du n° 1 au n° 178.
PLOT demande aux Régionales de présenter leurs publications : Jean Fromentin va présenter Corol'aire.
Merci à la collègue qui a donné toute sa collection de Tangente.

Calendrier 2006-2007
27/09/06 : réunion du Comité régional
26 au 28/10/06 : journées de Clermont
15/11/06 : réunion à La Rochelle sur les journées 2008.
6 ou 13/12/06 : Assemblée générale de la Régionale.

La séance est levée à 17 h 30. Nous nous retrouvons autour d'un pot pour dire au revoir à Marie Parent qui quitte l'Académie.

Chantal Gobin

Troc de trucs

Dans le Corol'aire n°63, nous vous proposions d'échanger des trucs ou des illustrations qui permettent aux élèves de mémoriser ou de visualiser une formule, un résultat, une démarche.
Cette rubrique "Troc de trucs" permet à tous de les échanger. Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : chantal.gobin@wanadoo.fr

1. Pour connaître les valeurs du sinus d'un angle de mesure particulière :
Écrire dans la première ligne d'un tableau, les différentes mesures : 0°, 30°, 45°, 60° et 90°.

Dans la deuxième ligne du tableau, écrire dans chaque case $\frac{\sqrt{\dots}}{2}$.

Compléter ensuite la quantité sous le radical avec : 0, 1, 2, 3, 4.

2. Pour retenir les formules des coordonnées du milieu d'un segment dans un repère :
Associer à « milieu », le mot « moyenne ».

Rallye Mathématique Poitou-Charentes 2007

LE RALLYE RAJEUNIT

Rallye 2006 : les solutions

Vous trouverez, pages 7 et 8, les éléments de solutions de l'édition 2006 du Rallye.
L'épreuve et les solutions sont aussi disponibles sur le site de la Régionale APMEP de Poitiers. Comme les années précédentes, nous mettrons sur ce site quelques « morceaux choisis » glanés au fil des dossiers des classes participantes.

Rallye 2007 : les innovations

Depuis quelques années, nous assistons à une diminution significative de la participation des classes de troisième au Rallye de notre Académie. Difficulté de l'épreuve pour des élèves de troisièmes ? Classes difficiles ? Problèmes d'organisation du fait de la durée de l'épreuve ? Manque de temps compte tenu des nombreuses actions éducatives organisées dans les collèges ? Impossibilité de participer du fait des voyages organisés début avril ? Autant de questions que l'équipe organisatrice du rallye a soulevées lors de sa première réunion le 20 septembre dernier.
Aussi, pour l'édition 2007, et avec l'accord du Comité de la Régionale APMEP de Poitiers, l'équipe propose :
- en plus des $3^{\text{ème}}$ et 2^{nde}, d'étendre l'épreuve aux classes de $6^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$, avec des problèmes communs à deux niveaux consécutifs,
- de ramener l'épreuve à une heure en diminuant le nombre de problèmes à résoudre (4 problèmes sont envisagés ainsi qu'une question historique),
- de maintenir le concours à la classe entière et la rédaction des solutions sous la forme d'un dossier,
- d'avancer la date de l'épreuve au 20 février.

L'équipe travaille dès à présent à construire une épreuve d'entraînement qui sera envoyée début décembre dans tous les collèges et lycées, publics et privés, de l'Académie avec le bulletin d'inscription.

L'équipe organisatrice espère que cette évolution redynamisera l'épreuve au niveau des collèges.

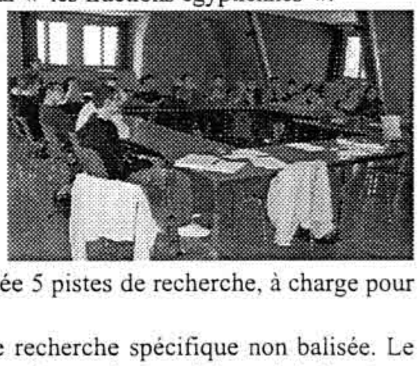
Pour l'équipe, Jean Fromentin

MATh.en.JEANS 2005-2006 :
« Les fractions égyptiennes »

Pour la 3ème année des clubs mathématiques ont été mis en place dans l'Académie dans le cadre MATh.en.JEANS (**M**éthode d'**A**pprentissage des **Th**éories **en** **J**umelant des **E**tablissements pour une **A**pproche **N**ouvelle du **S**avoir).

Déroulement de l'année

4 lycées de l'Académie (Le Bois d'Amour de Poitiers, le LISA d'Angoulême, Marcel Dassault de Rochefort, Saint-Joseph de Bressuire) se sont « jumelés » pour conduire une recherche mathématique. Lors de rencontres de coordination (juillet et août) Camille Laurent chercheur à l'Université de Poitiers a proposé deux sujets, le groupe a retenu celui sur « les fractions égyptiennes ».



Puis une présentation a été faite par Camille Laurent en septembre dans chacun des 4 lycées ; elle a été l'occasion, de façon diversifiée, d'échanger avec les élèves sur les mathématiques, la recherche, l'université. Dans la foulée les élèves se sont retrouvés à raison d'une rencontre par semaine. Les groupes ont aussi échangé, à l'aide d'un forum par Internet, entre eux et avec le chercheur.
Le premier « séminaire » fin novembre à Poitiers a permis à chaque groupe d'exposer ses premières recherches : d'une part ces exposés ont permis de consolider la maîtrise des méthodes (Fibonacci et « Matching pair »), d'autre part les questions et pistes évoquées ont été autant d'idées pour les autres groupes. Le chercheur a proposé dans la foulée 5 pistes de recherche, à charge pour chaque groupe de se focaliser sur l'une d'elle.
Les semaines qui ont suivi ont souvent été plus difficiles, chaque groupe étant sur une recherche spécifique non balisée. Le second séminaire, début mars, a permis à chaque groupe d'exposer ses avancées. Les semaines qui ont suivi ont été plus chargées : il fallait mettre au point une intervention pour le colloque à Paris à la Cité des Sciences et de l'industrie de la Villette les vendredi 31 mars, samedi et dimanche 1 et 2 avril.
Lors de ce colloque, chaque groupe a été chargé d'animer 2 ou 3 fois en 15 minutes l'un des 4 pôles prévus. D'autre part une intervention commune de 20 minutes a été montée et présentée en amphi. Tout en assurant une permanence à un stand, les élèves ont pu aussi découvrir d'autres projets présentés par des groupes d'autres collèges ou lycées ; ils ont pu bénéficier aussi des expositions scientifiques de la Villette.

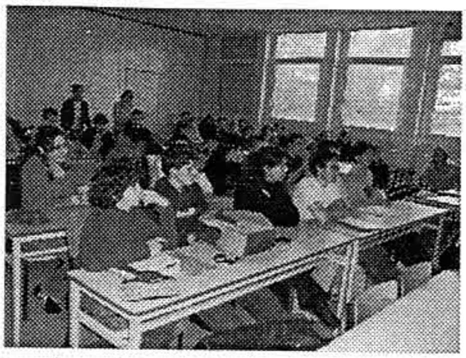
L'année devrait se terminer par une « publication » : les contraintes sont telles que certains groupes ne peuvent la réaliser ; deux groupes en proposent une ; reste à voir si elles seront acceptées par le comité de lecture de MATh.en.JEANS.

Lycée du Bois d'Amour de Poitiers : (Compte-rendu fait par les élèves)

Le sujet proposé par le chercheur était les fractions égyptiennes. Nous avons commencé par chercher des décompositions de 2 en fractions égyptiennes, ce qui nous a permis de découvrir le matching pair et l'algorithme de Fibonacci.

Après quelques recherches, nous avons rencontré les groupes d'Angoulême, Rochefort et Bressuire qui travaillaient sur le même sujet que nous, à l'université de Poitiers. Lors de cette réunion, Camille Laurent nous a donné plusieurs pistes : les décompositions de 1 à l'aide du matching pair en étudiant le comportement du nombre de termes à la fin de la décomposition (appelé S(x)) - Les entiers parfaits à un millième près - Syracuse et les entiers parfaits sous sa forme égyptienne - codage pour CLE - utilisation du théorème de Bézout.

À Poitiers nous avons choisi 2 thèmes : Bézout et «S(x)».



Premier séminaire à Poiters le 17 - 11 - 05

I - Bézout. *Théorème de Bézout* : Si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors on peut trouver deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$. À partir de là, on en déduit $\frac{a}{b} = \frac{1}{bu} - \frac{v}{u}$ (u doit donc être positif et v négatif). Nous avons d'abord commencé à partir d'un exemple : nous avons essayé de décomposer la fraction $\frac{6}{7}$: $\frac{6}{7} = \frac{1}{42} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$.

À partir de cet exemple, nous avons trouvé une formule permettant de décomposer toute fraction de la forme $\frac{a}{a+1}$:

$\frac{a}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{a-1}{a}$. $a - 1$ et a étant deux entiers consécutifs, on peut réitérer le procédé.

Nous avons ensuite décidé de chercher des décompositions des fractions de la forme $\frac{a}{a+2}$ (avec a impair) :

$\frac{a}{a+2} = \frac{1}{(a+2)\frac{a+1}{2}} + \frac{\frac{a-1}{2}}{\frac{a+1}{2}}$ où $\frac{a-1}{2}$ et $\frac{a+1}{2}$ sont des entiers consécutifs ce qui permet de recommencer le procédé.

À partir de ces deux formules, nous avons essayé d'en déduire une décomposition de toute fraction de la forme $\frac{a}{a+k}$, mais nous avons été confrontés à un problème, et nous n'avons pas pu en conclure de formule générale.

Nous avons donc décidé de reprendre avec les fractions de la forme $\frac{a}{a+3}$ pour lesquelles nous avons trouvé un algorithme de décomposition.

II - S(x). S(x) est le nombre de termes à la fin d'une décomposition de 1 du type $1 = x \times \frac{1}{x}$

Nous avons commencé par prouver que S(x) = S($2x$), cela nous a permis de n'utiliser que des x impairs par la suite. Nous avons cherché S(x) jusqu'à $x = 33$, et nous avons construit un graphique à l'aide des résultats trouvés, et nous en avons déduit un tableau.

À partir de là deux conjectures sont apparues :

- Tout d'abord que $S(2^k+1) = 2^k+1$ (k entier naturel)
- Puis que $S(2^k-1) = 2k-1$ (k entier naturel)

Ces deux résultats ont été prouvés. Pour cela nous avons d'abord travaillé avec des exemples pour ensuite passer à la généralisation.

Le 2 mars, nous avons à nouveau rencontré Camille et les autres lycées travaillant sur le même sujet que nous sur le site du Futuroscope, à la faculté de mathématiques.

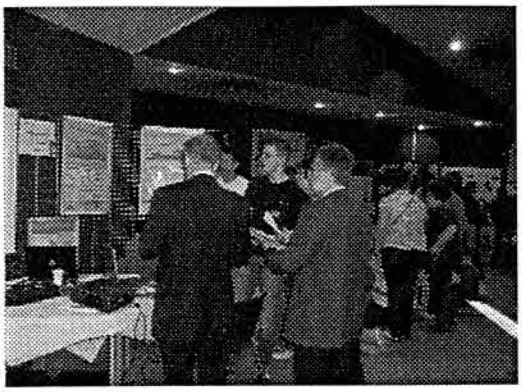
Le reste du temps à été consacré à l'élaboration du diaporama présenté au congrès à La Villette.

Nous avons ensuite présenté notre travail devant quelques professeurs de sciences de notre lycée.

Lycée de l'Image et du Son d'Angoulême

La présentation initiale du projet a été faite au sein de l'amphithéâtre de l'établissement. Les élèves intéressés par le sujet et les élèves des filières scientifiques ont été invités à participer à celle-ci. Environ 100 à 150 élèves sont venus y assister. Deux créneaux horaires leur on été proposés. Un groupe d'une vingtaine d'élèves s'est constitué pour rapidement se stabiliser à 12 élèves qui ont participé toutes les semaines au projet. Le groupe était constitué d'un élève de seconde, 2 élèves de première S et 9 élèves de terminale S.

Les élèves se sont partagés le travail en deux. Un premier groupe a travaillé sur l'algorithme dit de Fibonacci et le second sur la méthode de décomposition dite du « matching pairs ». Les élèves du premier groupe se sont rapidement aperçus que l'algorithme de Fibonacci avait un inconvénient majeur : les dénominateurs des fractions unitaires devenaient vite très grands. Les calculatrices faisant des arrondis, le programme qu'ils avaient implanté sur une calculatrice leur donnait rapidement des décompositions fausses. Les élèves du second groupe ont rapidement obtenu des décompositions de l'entier 1 avec la méthode des « matching pairs » mais ont vite rencontré des problèmes pour la décomposition des entiers supérieurs.
Les questions soulevées furent nombreuses : Peut-on améliorer l'algorithme de Fibonacci pour « contrôler » les dénominateurs des fractions unitaires ? Peut-on connaître le nombre de termes que l'on va obtenir lors d'une décomposition en fraction Egyptienne ? Peut-on à l'aide des différentes décompositions de 1 trouver des décompositions des entiers supérieurs ?...


Participation à Exposciences2006 les 17-19 mai

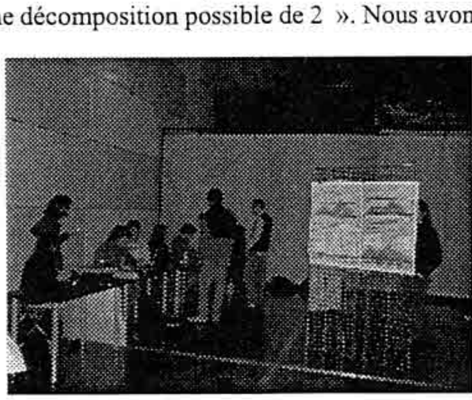
Ils n'ont bien évidemment pas eu le temps de répondre à toutes ces questions. Ceux qui travaillaient sur la méthode des « matching pairs » ont réussi après différentes tentatives à déterminer plusieurs décompositions de l'entier 2 mais aucune pour les entiers supérieurs. Le groupe qui travaillait sur la méthode de Fibonacci a créé un algorithme utilisant le théorème de Bézout. Ils ont rigoureusement démontré qu'avec cet algorithme, ils étaient capables de décomposer toute fraction de la forme a/b comprise entre 0 et 1 en fraction Egyptienne de façon à ce que tous les dénominateurs soient majorés par b^2 et que deux dénominateurs consécutifs possèdent toujours un diviseur commun.
Ils ont par la suite participé à Exposciences à Poitiers. Leur projet intitulé « Bon Bezout des pharaons » a été primé pour la qualité de la démarche scientifique qui a été mise en place lors de sa construction.

Lycée Marcel Dassault de Rochefort

La présentation du début d'année a rassemblé une vingtaine d'élèves. Rapidement, le groupe s'est stabilisé à 6 élèves : un de seconde, trois de première S et deux de terminale S, qui se sont réunis une fois par semaine, le vendredi entre 13 et 14 heures.
La première étape a consisté à apprivoiser les fractions égyptiennes : vocabulaire, techniques de décomposition (algorithme de Fibonnacci), programmation.
Suite aux pistes de recherche proposées lors du premier séminaire à Poitiers, le groupe a rapidement opté pour la méthode dite des « matching pairs » ou « appariements » qui a été utilisée de façon systématique pour décomposer 1 à partir de l'égalité :

$$1 = p \times \frac{1}{p} \; .$$

Des exemples ont été traités « à la main » puis nous avons utilisé les compétences d'un programmeur maison pour traiter un grand nombre de données et faire émerger des résultats. On a observé que *lorsque $p = 2^n - 1$, il semble que la décomposition finale comporte 2n-1 termes et que cette décomposition se fait en n-1 étapes* puis que *lorsque $p = 2^n + 1$, il semble que la décomposition finale comporte p termes et que cette décomposition se fait en n étapes*. Nous avons ensuite démontré la première de ces conjectures.
Forts de ces résultats, nous avons alors essayé d'appliquer la même méthode pour décomposer 2. Très vite, nous nous sommes rendus compte, qu'à moins de « bricoler », nous n'arrivions pas à décomposer 2 avec notre méthode systématique, ceci étant dû à l'apparition de cycles que nous avons baptisés « les cycles maudits ». Là encore, le recours à un programme nous a permis de corroborer nos intuitions, mais nous n'avons pas réussi à établir la démonstration (une piste : 1/ 2 apparaît dans toutes les décompositions).
Puisque nous n'arrivions pas à décomposer 2 on a eu l'idée de s'en rapprocher en essayant de décomposer des fractions du type $\frac{q}{p} = \frac{1}{p} + ... + \frac{1}{p}$ q fois, avec q le plus grand possible. D'abord à la main : il y a celles qui marchent et celles qui ne marchent pas. Enfin, « par programmation » en donnant l'instruction au programme d'arrêter dès qu'il y a un cycle.
On a alors mis en évidence une suite $u_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1}$ qui semblait être « la plus proche décomposition possible de 2 ». Nous avons étudié cette suite mais n'avons pas réussi à terminer les démonstrations des résultats pressentis.
En effet, nous avons dû stopper les recherches pour mettre en forme l'exposé présenté à la Cité des Sciences, travail (écrit, support informatique et oral) qui a demandé un très lourd investissement de la part des élèves mais qui a permis dans sa partie rodage de faire connaître l'atelier MATh.en.JEANS dans le lycée (exposés dans les classes et lors des portes ouvertes).


Participation au colloque MATh.en.JEANS à Paris les 31 mars, 1 et 2 avril.

Lycée Saint Joseph de Bressuire

Lors de la présentation initiale, une vingtaine d'élèves sont venus découvrir le sujet. Pendant plusieurs semaines, 11 se sont retrouvés régulièrement, puis progressivement le groupe s'est stabilisé à 5 (deux ont décroché dès que le mot « démonstration » a été prononcé, 1 s'est laissé piéger par des recherches unique-

ment orientées sur Internet, 1 autre a du laisser l'atelier par « surcharge » de travail, 2 autres, internes, ont préféré rentrer chez leurs parents le week-end du colloque et se sont ainsi progressivement désinvestis).
Après s'être approprié les trois méthodes de décomposition (méthode égyptienne, méthode de Fibonacci, et méthode « Matching pair »), le groupe s'est lancé dans des calculs à la main, puis a obtenu des résultats à l'aide de programmes faits par eux-mêmes avec une calculatrice ou en langage Php et C.
L'objectif principal étant de décomposer 1 en « fraction égyptienne », ils ont d'abord cherché diverses décompositions, compté le nombre de termes pour essayer d'en dégager un résultat. L'un deux a orienté les recherches vers des décompositions de 1 en imposant le plus petit dénominateur ; ils se sont alors posé trois questions puis ont résolu les deux premières : peut-on obtenir 1 en faisant la somme de fractions unitaires à dénominateurs consécutifs ? Est-on certain, à partir d'une fraction unitaire et en ajoutant suffisamment de telles fractions à dénominateurs consécutifs, d'obtenir une somme supérieure à 1 ? Peut-on décomposer 1 en imposant le plus petit dénominateur ?

« Faites de la science », Poitiers le 01 - 06- 06

Suite à une erreur de programmation, les calculs de cette dernière décomposition ont dû être redisposés en « pyramide », de là est venue une méthode spécifique qui permet de décomposer 1 avec cette contrainte, mais aussi de décomposer tout entier en imposant le plus petit dénominateur. Le programme donne des résultats satisfaisants concernant le nombre de termes et les premières décompositions ; il a été démontré qu'il n'y a pas de collision en un point particulier, mais il reste à démontrer qu'il n'y en a pas ailleurs.
Leur recherche intitulée « Fractions égyptiennes : décomposer tout entier en fraction égyptienne » a été présentée à « Exposciences 2006 » à Poitiers les 17-18-19 mai et au concours « Faites de la science » à l'Université de Poitiers le 1 juin. Elle a été bien appréciée par les jurys en particulier pour la qualité de la démarche scientifique.

Camille Laurent

« Enseignant à l'Université depuis près de sept ans, j'ai toujours été surpris par la passivité de certains étudiants, d'un trop grand nombre d'étudiants devrais-je dire. D'une part, beaucoup ne semblent pas aimer les sciences, (et n'y voient qu'un outil pour devenir cadre, ingénieur ou enseignant, ce qui est d'ailleurs tout à fait estimable). Mais encore et surtout, trop d'étudiants, lesquels acceptent de refaire à l'infini des exercices qu'ils savent déjà faire, refusent de chercher la solution d'un exercice qu'ils ne savent pas faire, considérant sans doute comme inutile de se fatiguer quand je leur donnerai une solution bien ficelée et bien rôtie quelques instants plus tard.
Je dois dire que, heureusement, il y a de très nombreuses exceptions. Mais le seul antidote me semble être d'apprendre aux élèves dès le Lycée cette chose, qui ne s'enseigne d'ailleurs pas, et qui est de savoir chercher ce que l'on ne sait pas. Je dois dire avoir été émerveillé par la ténacité des lycéens que j'ai rencontrés au cours de ce projet, et par leur imagination, qui parfois peut sembler naïve, mais de cette naïveté qui fait se poser les bonnes questions. Je sais que peu d'entre eux sinon aucun, ne deviendra mathématicien, mais je me réjouis de ce qu'ils ne deviendront jamais de ces étudiants dont j'ai médit ci-dessus. Je me suis réjoui surtout pour eux le jour où ils m'ont demandé, comme si j'étais un oracle, si tel algorithme fonctionnait toujours, et où mes collègues et moi ont bien dû répondre : "je ne sais pas, et j'ai eu beau essayer de comprendre, je ne vois pas du tout comment faire" ; ce jour là ils ont forcément compris que, parfois, on ne peut pas attendre qu'une solution salvatrice tombe à point. Je dois d'ailleurs les féliciter pour avoir su trouver quelques résultats ou quelques conjectures qui sont à mon avis nouvelles, et qui, partant, devraient porter leurs noms !
Je dois avant tout remercier mes collègues des quatre Lycées, qui ont fait la partie la plus énorme du travail, je ne suis intervenu, à vrai dire, que tout à fait au début, et tout à fait à la fin. »

À suivre...

L'année 03-04 avait vu le premier projet MATh.en.JEANS dans l'Académie sur « les nombres pointés », l'année 04-05 avait permis à trois lycées d'échanger sur « les codages ». L'année 06-07 est lancée avec, en plus de Camille Laurent, l'appui de Marie-Eve Modolo, sur les sujets « solitons discrets » et « jeux de Nim ».

Marie-Hélène Bertaud, Anne Blein, Maryse Cheymol, Florence Gabarra, Céline Hérault, Cédric Jossier, Loïc Jussiaume, Gilles Maréchal.

Journées de l'APMEP
CLERMONT-FERRAND
du jeudi 26 au samedi 28 octobre 2006.

Les mathématiques : un volcan actif ?

RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - Épreuve 2006 - **Éléments de solutions**

1 Eratosthène de *Cyrène* (15 points)

- Époque à laquelle il a vécu : il est né à *Cyrène* vers -284. Il devient aveugle et se laisse mourir de faim. Il meurt à *Alexandrie* vers -192.
- Ses activités professionnelles : il a été directeur (conservateur) de la grande Bibliothèque d'Alexandrie en -236.
- Ses recherches scientifiques :

En 230 avant J.C., Ératosthène propose une méthode purement géométrique pour mesurer la taille de la Terre.

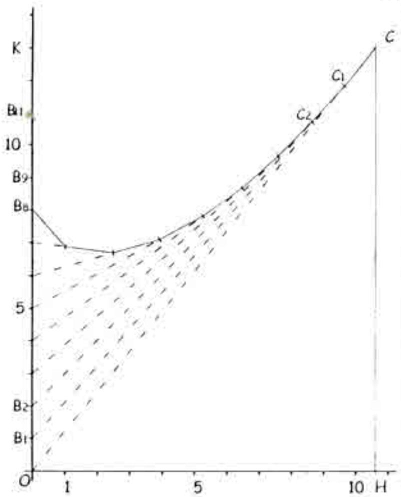
On lui doit aussi le crible qui porte son nom (*Crible d'Ératosthène*) et qui consiste à déterminer les premiers nombres premiers.

2 Commémorations (5 points par problème - maximum 15 points)

Benjamin Franklin est né en 1706, Charles de Coulomb est mort en 1806. 1906 a vu la naissance des mathématiciens André Weil et Jean Dieudonné, membres fondateurs du groupe Bourbaki. Le chimiste Henri Moissan et le physicien Joseph John Thomson ont été prix Nobel cette même année. C'est aussi en 1906 qu'Alzheimer a identifié la maladie qui porte son nom et que la bouteille Thermos a été inventée par Sir James Dewar. Irène Joliot-Curie est décédée en 1956. Mais aucune classe n'a signalé que Pierre Curie est mort brutalement en 1906, écrasé par un camion.

3 Poursuite (15 points)

Léa Broutille marche à 2m/s et Bourbaki à 3m/s. Quand Léa est en B8, Bourbaki est en C8. Quand elle est en B9, son chien est alors en B8. Comme Bourbaki gagne 1 mètre sur sa maîtresse à chaque seconde, il la rejoint finalement en B11 au bout de 5,5 secondes. Ils sont donc à 11 m du point O à 12 h 5,5 s.



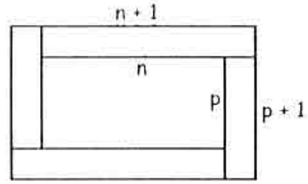
4 Énigme numérique (5 points)

111 = 3x37. A = 1, A = 3, A = 37 ou A = 111.
Deux solutions : A = 1, B = 1 et A - B = 0 ; A = 37, B = 27 et A - B = 10

5 Cour de *Mat* et *Matic* (10 points)

2006 = 59 x 17 x 2. Il y a donc 17 côtés de carreaux sur le demi - périmètre.
Les possibilités sont les suivantes (Longueur, largeur) : (14, 3), (13, 4), (12, 5), (11, 6), (10, 7) et (9, 8).
Le nombre de carreaux extérieurs $2(L + l - 2)$ est constant : 30 ;
le nombre de carreaux intérieurs $(L - 2)(l - 2)$ est respectivement : 12, 22, 30, 36, 40 et 42.
Les dimensions de la cour de Mat et Matic comprend donc 12 carreaux dans la longueur et 5 carreaux dans la largeur, soit 12 x 59 cm = 708 cm et 5 x 59 cm = 295 cm.

Complément : Quels sont tous les rectangles ayant autant de carreaux sur le pourtour qu'à l'intérieur ?
Notons *n* et *p* les dimensions du rectangle intérieur.
$2(n + 1) + 2(p + 1) = np$; $np - 2n - 2p - 4 = 0$; $(n - 2)(p - 2) = 8$.
Si n - 2 = 8 et p - 2 = 1 alors n = 10 et p = 3 ; les dimensions du rectangle sont donc 12 et 5.
Si n - 2 = 4 et p - 2 = 2 alors n = 6 et p = 4 ;
les dimensions du rectangle sont donc 8 et 6.



6 Le piano extraterrestre (15 points)

Désignons par *c' b' a b c* cinq touches successives. Partant de la touche *a*, il y a neuf triplets possibles : *aaa, aab, aab', aba, abb, abc, ab'a, ab'b'* et *ab'c'*
Si la touche *a* est la dernière à droite (respectivement à gauche), il faut éliminer les triplets comportant *b* et *c* (resp. *b'* et *c'*). Il reste donc 5 triplets possibles.
Si la touche *a* est l'avant-dernière à droite (respectivement à gauche), il faut éliminer les triplets comportant *c* (respectivement *c'*). Il reste alors 8 triplets possibles.
Il y a donc 2x(5 + 8) = 26 triplets possibles avec les quatre touches des extrémités du clavier.
Il reste 2006 - 26 = 1980 triplets pour les autres touches, soit 1980 : 9 = 220 touches.
Il y a donc en tout 224 touches sur ce piano.

7 Mauvaise entente (10 points)

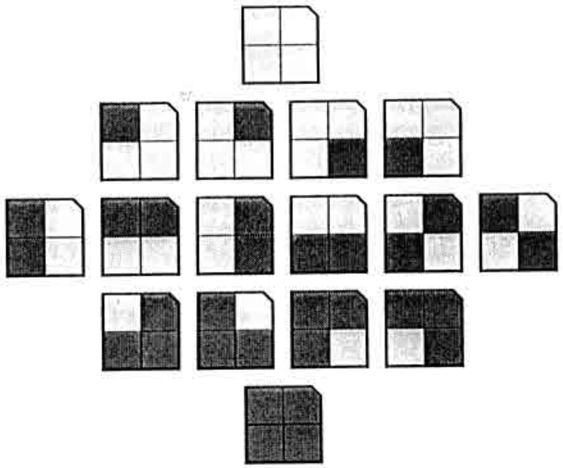
Alex et Alain roulent dans un premier temps à 300 m/min. À leur séparation, Alain roule alors à 700 m/min pendant 5 min. Il parcourt donc 3500 m pendant qu'Alex parcourt 1500 m. Ils sont donc à 2000 m l'un de l'autre. Alain retourne à 500 m/min. Ils se rapprochent donc à raison de 800 m/min. Ils se retrouveront au bout de 2,5 min. Alex a donc roulé seul pendant 7,5 min. Il a donc parcouru 2250 mètres.

8 Une devinette bien cachée (10 points)

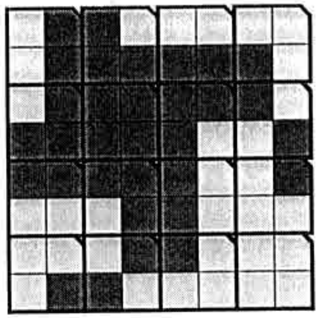
Le message est : « À quels siècles Eratosthène a-t-il vécu ? »
Réponse : Aux 3ème et 2ème siècles avant J-C.

(9) Carrés chromatiques (15 points)

Il y a 16 carrés différents (dessin ci-dessous).



Une solution sur le tore : la règle de juxtaposition (les zones de deux côtés adjacents doivent être de la même couleur) est respectée aussi sur les bords (gauche - droite) et (haut - bas).



En reproduisant ce carré dans tout le plan, on obtient le motif du tissu « pied de poule ».

(10) Le disque (15 points)

On remarque tout d'abord que s'il n'y avait, sur le disque, qu'une succession de nombres de la forme 2006, ceux-ci tourneraient sans se modifier. Il n'existe sur le disque qu'une zone d'irrégularité, entre l'arc 2006 et l'arc 1. Voyons comment évoluent les chiffres à cet endroit

2006ème position — position n°1

2006200620200620062006	avant le premier coup
6200620062620062006200	après le premier coup
0620062006062006200620	après le deuxième coup
0062006200006200620062	après le troisième coup
2006200620000620062006	après le quatrième coup
6200620062000062006200	après le cinquième coup
0620062006200006200620	après le sixième coup

À partir de la fin du troisième coup, les chiffres vont donc tourner sans irrégularité, avec un bloc de quatre zéros consécutifs. Le 6 qui est dans l'arc 3 au bout du troisième coup sera, au bout du 2006ème coup, dans l'arc 2006. La réponse est donc 6.

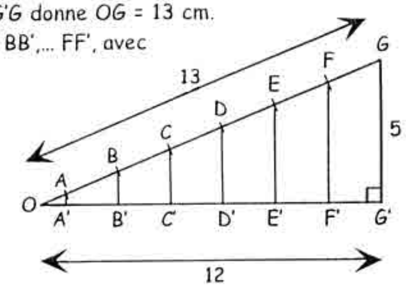
(11) Jouons aux cubes (5 points)

Les pièces A et B contiennent chacune deux petits cubes noirs. Tout assemblage de ces pièces ne permet d'obtenir qu'un nombre pair de petits cubes noirs. Or le grand cube en compte 13. Il n'y a donc aucune solution.

Complément : 3 pièces A et 4 pièces B donnent 13 petits cubes blancs et 14 petits cubes noirs. Ces sept pièces permettent-elles de réaliser un grand cube dont, cette fois, les coins sont noirs, en respectant bien sûr l'alternance des couleurs ?

(12) Exercice bien ficelé (10 points)

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle $OG'G$ donne $OG = 13$ cm.
Il y a donc six tours de ficelle de rayons successifs AA', BB',... FF', avec $OA = 1$ cm, $OB = 3$ cm, $OC = 5$ cm ... $OF = 11$ cm.
Le théorème de Thalès dans le triangle OGG', donne :
$AA' + BB' + ... + FF' = (1 + 3 + 5 + ... + 11) \times 5/13$.
La somme des longueurs des cercles est donc
$2\pi \times 36 \times 5/13 = 360\pi/13$.
La longueur nécessaire de ficelle est donc de
$360\pi/13 + 4{,}8$.
Il faut donc environ 92 cm de ficelle.

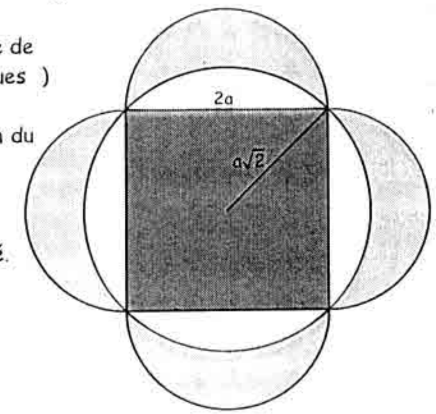


(13) Des calculs pour cette année (15 points)

1) $2006 = 59 \times 17 \times 2$. Les deux nombres cherchés sont donc $A = 59$ et $B = 34$.
2) Trois possibilités pour A : $59 = 7^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 = 5^2 + 5^2 + 3^2 + 0^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2$.
On a donc $a = 7, b = 3, c = 1, d = 0$; $a = 5, b = 5, c = 3, d = 0$; $a = 5, b = 4, c = 3, d = 3$,
3) Deux possibilités pour B : $34 = 5^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 4^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$.
on a donc $e = 5, f = 2, g = 2, h = 1$; $e = 4, f = 4, g = 1, h = 1$.
4) Pour $a = 7, b = 3, c = 1, d = 0$ et $e = 5, f = 2, g = 2, h = 1$
on a $\mathbf{P} = 35 + 6 + 2 + 0 = \mathbf{43}$; $\mathbf{Q} = 14 - 15 + 1 - 0 = \mathbf{0}$; $\mathbf{R} = 14 - 3 - 5 + 0 = \mathbf{6}$; $\mathbf{S} = 7 + 6 - 2 - 0 = \mathbf{11}$.
5) $\mathbf{T} = 43^2 + 0^2 + 6^2 + 11^2 = \mathbf{2006}$.
Voici les autres possibilités avec T toujours égal à 2006.
Pour $a = 7, b = 3, c = 1, d = 0$ et $e = 4, f = 4, g = 1, h = 1$, on a $P = 41$; $Q = 17$; $R = 0$; $S = 6$.
Pour $a = 5, b = 5, c = 3, d = 0$ et $e = 5, f = 2, g = 2, h = 1$, on a $P = 41$; $Q = (-12)$; $R = (-10)$; $S = 9$.
Pour $a = 5, b = 5, c = 3, d = 0$ et $e = 4, f = 4, g = 1, h = 1$, on a $P = 43$; $Q = 3$; $R = (-12)$; $S = (-2)$.
Pour $a = 5, b = 4, c = 3, d = 3$ et $e = 5, f = 2, g = 2, h = 1$, on a $P = 42$; $Q = (-13)$; $R (-3)$; $S = (-8)$.
Pour $a = 5, b = 4, c = 3, d = 3$ et $e = 4, f = 4, g = 1, h = 1$, on a $P = 42$; $Q = 4$; $R = 1$; $S = (-15)$.

(14) Il y a le ciel, le soleil et la mer (10 points)

L'aire A des quatre croissants est égale à l'aire totale de la figure (le carré central et les quatre demi - disques) moins l'aire du cercle central.
Si le carré a pour côté $2a$, son aire est $4a^2$; le rayon du cercle central est $a\sqrt{2}$ et son aire est donc $2\pi a^2$.
L'aire des quatre demi - disques est $2\pi a^2$.
L'aire des quatre croissants est donc
$A = 4a^2 + 2\pi a^2 - 2\pi a^2 = 4a^2$, c'est-à-dire l'aire du carré.



RU-BRI-COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.
Frédéric de Ligt

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Pour ouvrir cette rubrique de rentrée scolaire, je vous propose un petit texte écrit en 1908 qui n'a rien perdu de son actualité.
« Nous sommes dans une classe de quatrième ; le professeur dicte : le cercle est le lieu des points du plan qui sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre. Le bon élève écrit cette phrase sur son cahier ; le mauvais élève y dessine des bonhommes ; mais ni l'un ni l'autre n'ont compris ; alors le professeur prend la craie et trace un cercle sur le tableau. « Ah ! pensent les élèves, que ne disait-il tout de suite : un cercle c'est un rond, nous aurions compris. » Sans doute, c'est le professeur qui a raison. La définition des élèves n'aurait rien valu, puisqu'elle n'aurait pu servir à aucune démonstration, et surtout puisqu'elle n'aurait pu leur donner la salutaire habitude d'analyser leurs conceptions. Mais il faudrait leur montrer qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils croient comprendre, les amener à se rendre compte de la grossièreté de leur concept primitif, à désirer d'eux-mêmes qu'on l'épure et le dégrossisse.»
Henri Poincaré, *Science et méthode*, Editions Kimé, 1999, p.107.

Des problèmes

66-1 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :
Montrer que 1 est valeur d'adhérence de la suite de terme général $\cos^n n$.

66-2 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
n joueurs ($n \geq 2$) se sont affrontés deux à deux au cours d'un tournoi. Il n'y a pas eu de match nul. Montrer que l'on peut ranger les joueurs en une suite $x_1, x_2, \dots x_n$ telle que pour tout $i = 1, 2, \dots, n-1$, le joueur x_i a battu le joueur x_{i+1}.

66-3 *toujours de Jean-Christophe Laugier* :
Soit n un entier ≥ 1 ; combien y a-t-il de partitions de n dont les sommants sont tous égaux ou prennent deux valeurs distinctes consécutives ? Par exemple pour $n = 4$, il y a quatre partitions possibles : 4, 2 + 2, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1.

Des solutions

61-2 *de Serge Parpay* :
Trois exercices de la classe de Math-Élem, extraits du livre : « Arithmétique – Classe de mathématiques » - Maillard et Millet (Hachette 1960).
Exercice 1
1) Comment faut-il choisir deux nombres de deux chiffres pour qu'en renversant l'ordre des chiffres le plus petit reste le plus petit ?
2) Même question, le plus petit devenant le plus grand.
Exercice 2
1) Démontrer l'identité $x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x+1)^2 - 1$
2) Déterminer quatre nombres entiers consécutifs dont le produit est 73 440.
Exercice 3
On désigne par E(x) la partie entière du nombre fractionnaire x.
1) Si x est une fraction irréductible, montrer que x - E(x) l'est aussi.
2) Montrer que l'on a $E(x) + E(x+\frac{1}{n}) + \dots\dots + E(x+\frac{n-1}{n}) = E(nx)$.

Solution de Frédéric de Ligt :
Exercice 1
1) Si on note $\overline{ab}$ et $\overline{a'b'}$ les écritures décimales de ces deux nombres, l'énoncé se traduit par : $\overline{ab} < \overline{a'b'}$ et $\overline{ba} < \overline{b'a'}$.
Pour $a = a'$ on doit avoir $b < b'$ et pour $a < a'$ on doit avoir $b \leq b'$.
2) Avec les mêmes notations on doit cette fois réaliser les deux inégalités : $\overline{ab} < \overline{a'b'}$ et $\overline{ba} > \overline{b'a'}$. On ne peut avoir $a = a'$. Pour $a < a'$ il faut $b > b'$.
Exercice 2
1) Développements ou factorisations. Au choix.
2) L'identité précédente et la résolution de l'équation $x^2 + 3x - 270 = 0$ permettent d'obtenir deux quadruplets possibles : (15, 16, 17, 18) ou (-18, -17, -16, -15).
Exercice 3
1) Si $x = p / q$ avec p et q premiers entre eux et $p > 0$ on a l'égalité : $p / q = E(p / q) + r / q$ avec $0 \leq r < q$.
D'où $p = E(p / q)q + r$, et donc s'il y avait un facteur supérieur à 1 commun à r et q on pourrait le factoriser dans le membre de gauche et il diviserait alors p, il serait alors un diviseur commun de p et q. Contradiction.

2) Notons $I_k = [E(x)+\frac{k}{n}; E(x)+\frac{k+1}{n}[$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Les I_k forment une partition de l'intervalle $[E(x) ; E(x) + 1[$.

Si $x \in I_k$, pour $i = 0, 1, \ldots, n - 1 - k$ on a $x+\frac{i}{n} \in [E(x);E(x)+1[$ et donc $E(x+\frac{i}{n}) = E(x)$ et pour $i = n - k, \ldots, n - 1$ on a $x+\frac{i}{n} \in [E(x)+1; E(x)+2[$ et donc $E(x+\frac{i}{n}) = E(x)+1$. D'où, toujours pour $x \in I_k$:

$E(x) + E(x+\frac{1}{n}) + \ldots\ldots + E(x+\frac{n-1}{n}) = (n-k)E(x) + kE(x) + k = nE(x) + k$

Par ailleurs, pour $x \in I_k$, $E(x)+\frac{k}{n} \le x < E(x)+\frac{k+1}{n}$ ou encore $nE(x) + k \le nx < nE(x) + k + 1$ et donc $E(nx) = nE(x) + k$.

D'où l'égalité proposée.

61-4 *de Jean-Christophe Laugier* :

Problème 1 : Montrer que l'équation (1) : $3^x - 2^y = 1$ $(x, y \ge 2)$ n'a qu'une seule solution $x = 2$, $y = 3$; alors que l'équation (2) : $3^x - 2^y = -1$ $(x, y \ge 2)$ n'a pas de solution. Cas très particulier de la conjecture de Catalan.

Problème 2 : Montrer que pour tout entier n, il existe n entiers consécutifs dont aucun n'est une puissance parfaite.

Solution de l'auteur :

Problème 1 :

1) Démonstration par l'absurde. Soit (x_0, y_0) solution de (1) telle que $y_0 \ge 4$, y_0 étant minimal. On a $3^{x_0} = 2^{y_0} + 1$ et par suite $2^{y_0} + 1 \equiv 0[9]$. Le tableau

n	0	1	2	3	4	5	6
2^n mod 9	1	2	4	8	7	5	1

montre que $2^{y_0} + 1 \equiv 0[9]$ si et seulement si $n \equiv 3$ [6]. On a donc $y_0 = 3 + 6k = 3p$ avec p impair. Puisque $y_0 \ge 4$, il s'ensuit que $p \ge 3$. Donc $3^{x_0} = 2^{y_0} + 1 = 2^{3p} + 1 = (2^p)^3 + 1$. Comme $(2^p)^3 + 1$ est divisible par $2^p + 1$, il en résulte que $2^p + 1 = 3^{x'}$ avec $x' \ge 2$ puisque $p \ge 3$. Donc (x', p) est solution de (1) et $p < y_0$. On ne peut donc avoir $p \ge 4$ et par suite $p = 3$ d'où $y_0 = 9$ mais on ne peut avoir $3^{x_0} = 2^9 + 1 = 513$. Il n'y a donc pas de solution (x, y) de (1) telle que $y \ge 4$.

2) Soit (x, y) solution de (2) ; alors $2^y - 1 \equiv 0$ [3] donc y est pair. Posant $y = 2y'$, $(2^{y'} - 1)(2^{y'} + 1) = 3^x$. On ne peut avoir simultanément $2^{y'} - 1 \equiv 0[3]$ et $2^{y'} + 1 \equiv 0[3]$ car il en résulterait $2 \equiv 0$ [3] ; d'où $2^{y'} - 1 = 1$ et $2^{y'} + 1 = 3^x$ et par conséquent $y' = 1$ et $x = 1$ qui fournit $x = 1$, $y = 2$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $x, y \ge 2$.

Autre solution à cette dernière question de Louis Rivoallan :

Montrons que l'équation $3^x - 2^y = -1$ n'a pas de solution entière. En regardant les congruences modulo 3, on obtient :

$2^y \equiv 1$ [3]. *Par suite y est un nombre pair. Posons $y = 2y'$. L'équation s'écrit alors $3^x = 4^{y'} - 1$. Cela signifie que $3^x = \overline{3\ldots3}^{(4)}$ (écriture en base 4) ou encore $3^{x-1} = \overline{1\ldots1}^{(4)}$. $3^2 = 9 = \overline{21}^{(4)}$; $3^3 = 27 = \overline{123}^{(4)}$ ne conviennent pas. On a donc $x - 1 > 3$, c'est-à-dire $x > 4$ et donc $3^{x-1} > 16$. Alors $3^{x-1} \equiv \overline{11}^{(4)} \equiv 5[16]$. Mais il est facile de constater qu'aucune puissance de 3 n'est congrue à 5 modulo 16. L'équation proposée n'a donc pas de solution entière.*

Problème 2 :

Remarquons tout d'abord le résultat suivant de démonstration aisée : soit x un entier supérieur à 1 : $x = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$ avec $p_1, p_2, \ldots, p_k$ premiers, $n_1, n_2, \ldots, n_k \ge 1$. Alors :

x est une puissance parfaite $\Leftrightarrow$ PGCD$(n_1, n_2, \ldots, n_k) > 1$.

Une condition suffisante pour qu'un entier ne soit pas une puissance parfaite est donc qu'il soit divisible par un nombre premier p et non par p^2. En particulier si $x = p$ $[p^2]$ alors x n'est pas une puissance parfaite. n étant donné, montrons qu'il existe x tel que $x, x + 1, x + 2, \ldots, x + n - 1$ ne soient pas des puissances parfaites.

Désignant par (p_n) la suite des nombres premiers, il suffit de trouver x tel que ce système de congruences soit satisfait :

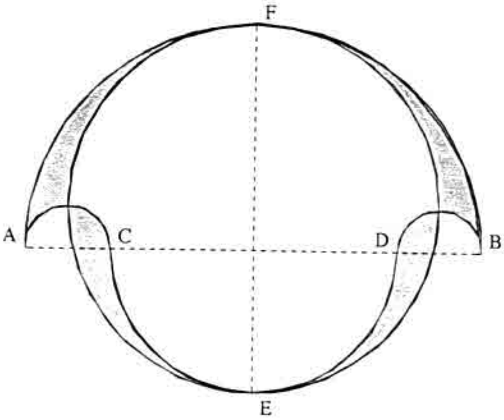
$$\begin{cases} x \equiv p_1 \ [p_1^2] \\ x+1 \equiv p_2 \ [p_2^2] \\ \ldots \\ x+n-1 \equiv p_n \ [p_n^2] \end{cases}$$

. Ce qui équivaut au système (S) :

$$\begin{cases} x \equiv p_1 \ [p_1^2] \\ x \equiv p_2 - 1 \ [p_2^2] \\ \ldots \\ x \equiv p_n - n + 1 \ [p_n^2] \end{cases}$$

Les entiers p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2 étant deux à deux premiers entre eux, le théorème des restes chinois permet d'affirmer que (S) admet une solution x unique inférieure à $p_1^2 p_2^2 \ldots p_n^2$ ce qui achève la démonstration.

62-1 *Le Bijou de Belinda Fram-Heto* :

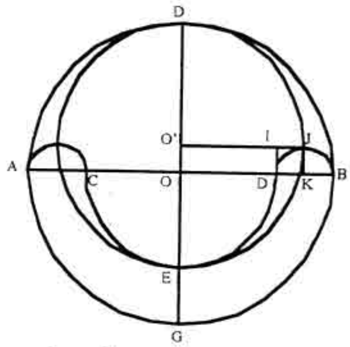


L'exercice 5 du rallye de cette année portait sur le salinon.
Le partage du diamètre [AB] en six parties égales avait été choisi pour que les élèves puissent faire facilement les calculs.
Mais le problème est plus général. Données :

- Demi-cercle de diamètre AB = 2R ;
- Deux demi-cercles de diamètres AC et DB (AC = DB = 2r) ;
- Le demi-cercle de diamètre CD ;
- Le cercle de diamètre EF.

Montrer que les quatre parties grisées ont la même aire. Trouver cette aire en fonction de R et de r.
Prof. Ila Ransor

Solution de Frédéric de Ligt :



Complétons le demi-cercle de diamètre AB en un cercle. L'aire du disque de diamètre AB excède l'aire du disque de diamètre EF de la quantité $\pi R^2 - \pi(R-r)^2 = \pi r(2R-r)$. L'aire de la zone ACEDBG vaut l'aire d'un demi-disque de diamètre AB auquel il faut ajouter l'aire d'un disque de diamètre DB et retrancher l'aire d'un demi-disque de diamètre CD :

$$\frac{\pi R^2}{2} + \pi r^2 - \frac{\pi(R-2r)^2}{2} = \pi r(2R-r)$$

Les deux aires qui viennent d'être calculées sont égales. Ôtons maintenant leur partie commune. Les deux parties grisées supérieures (sur la figure de l'énoncé) valent les deux parties grisées inférieures et l'on conclue, grâce à la symétrie de la figure, que les quatre parties grisées ont même aire.
Pour terminer, il faut maintenant évaluer l'aire d'une de ces quatre zones grisées. Prenons par exemple celle que l'on peut appeler EDJ. Son aire peut se calculer de la façon suivante : à l'aire du quart du disque de diamètre EF, ôtons l'aire du quart du disque de diamètre CD, l'aire du rectangle OO'ID et l'aire du carré IJKD puis ajoutons enfin l'aire du quart du disque de diamètre DB : $\frac{\pi(R-r)^2}{4} - \frac{\pi(R-2r)^2}{4} - r(R-2r) - r^2 + \frac{\pi r^2}{4} = (\frac{\pi}{2} - 1)(R-r)r$.

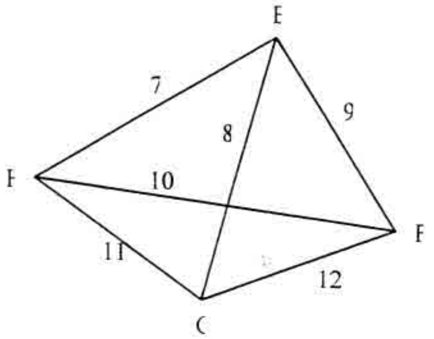
63-2 *de Jean-Christophe Laugier* :
Lors d'un congrès international on a observé les faits suivants :

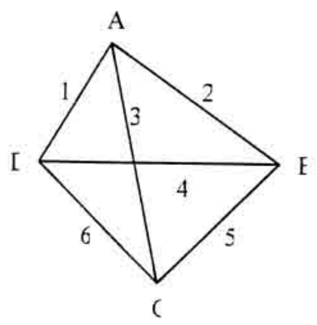
- Il y a au moins neuf participants.
- Chacun d'eux parle au plus trois langues.
- Parmi trois participants quelconques, il y en a toujours au moins deux parlant la même langue.

Montrer que l'on peut trouver trois participants parlant la même langue.

Solution de l'auteur :

Désignons par A un des participants de cette assemblée. De deux choses l'une : A *peut communiquer* avec au moins quatre autres participants ou bien A *ne peut pas communiquer* avec au moins cinq autres participants. Dans le premier cas, étant donné que A parle trois langues au plus, il existe deux participants B et C avec lesquels il parle une même langue. A, B et C parlent donc une langue commune. Dans le second cas, il existe cinq participants B, C, D, E et F avec lesquels A ne peut communiquer. D'après la troisième condition de l'énoncé, il en résulte que B peut communiquer avec C, D, E et F ; puisqu'il parle au plus trois langues, il parle une même langue avec deux d'entre eux, disons C et D. B, C et D parlent donc une langue commune. Là encore la conclusion tombe en défaut si l'assemblée ne comporte que huit personnes comme l'indique le graphe ci-dessous.





Deux participants sont reliés par une arête étiquetée i si et seulement si ils parlent en commun la langue i et elle seule.

Association
des **P**rofesseurs
de **M**athématiques
de l'**E**nseignement
Public

La Régionale A.P.M.E.P.
de Poitou-Charentes
vous invite à participer
à la conférence

Elisabeth HÉBERT
Christian VASSARD

Association Sciences en Seine et Patrimoine
et IREM de Rouen

« $\cos \pi = -1$ »

Une histoire de la trigonométrie

Il a fallu à l'humanité plusieurs coups de génie et des siècles de maturation pour parvenir à écrire une relation aussi évidente pour nous que

$$\cos \pi = -1.$$

Nous nous proposons de parcourir, à travers le temps et l'espace, les chemins empruntés par les mathématiciens, et les praticiens des mathématiques, pour parvenir à la trigonométrie que nous connaissons aujourd'hui.

POUR AFFICHAGE

POITIERS
le mercredi 11 octobre
à 14h30
Campus universitaire
Bât Delta, salle 2 ***(à côté de l'IREM)***

A.P.M.E.P. , I.R.E.M. Faculté des Sciences, 40, Avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS Cedex.