RU - BRI - COL AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Curiosité

« La première chose qu'aperçut Bruno, débouchant dans la prairie, fut la pyramide. Vingt mètres de base, une hauteur de vingt mètres : la chose était parfaitement équilatère.»

Michel Houellebecq, *Les particules élémentaires*, Editions J'ai lu, p.99.

La géométrie des écrivains n'est pas celle du commun des professeurs de mathématiques...

Des problèmes

65-1 *de Louis Rivoallan (Rochefort)* :

Ce fut comme un éclair. Si un tétraèdre est régulier, ses quatre faces ont la même aire. Evident ! Mais la réciproque ne serait-elle pas vraie elle aussi ? Tout en marchant vers le lycée, je me promets d'y réfléchir. C'est tout bête un tétraèdre, mais c'est quand même plus compliqué que cela n'y paraît. Et mon problème me semble bien plus compliqué que ce que je pensais.

Au lycée, je croise Jean Christophe Laugier. Un spécialiste de la rubrique. Bien évidemment, je lui soumets mon petit problème. Le lendemain, dans mon casier, je pouvais lire un contre exemple, signé Jean Christophe.

Sauriez vous aussi mettre à plat cette conjecture ?

Deux jours après, Jean Christophe m'avait photocopié un document fort intéressant sur le tétraèdre. Si on y trouvait des résultats assez difficiles à démontrer (du moins pour moi), il y avait également un "petit bijou", c'est à dire un résultat assez facile à obtenir et assez méconnu (en tout cas par moi !), qui peut être posé en classe de troisième ou de seconde. Sauriez vous démontrer qu'un tétraèdre a ses arêtes opposées de même longueur si et seulement si les quatre faces ont le même périmètre. Que peut-on dire alors des quatre faces de ce tétraèdre ?

65-2 *de Léa Broutille (Niort)* :

Soit deux droites d et d' perpendiculaires, O leur point d'intersection, δ et δ' les bissectrices des angles formés par ces deux droites. Un cercle Γ passant par O coupe d en A, d' en B, δ en C et δ' en D. Montrer que le quadrilatère ACBD est un carré.

Montrer que tout carré ACBD peut être « placé » sur les quatre droites, A sur d, C sur δ, B sur d', D sur δ'.

65-3 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

Déterminer des entiers A et B tels que A / B = 0,2006... avec B minimal.

65-4 *toujours de Jean-Christophe Laugier* :

Existe-t-il une fonction f de **R** dans **R** *non constante* telle que $f(x + 1) = f(x)$ et $f(x + \sqrt{2}) = f(x)$ pour tout réel x ?

Des solutions

59-1 *de Serge Parpay* :

Des maquettes de polyèdres peuvent être réalisées avec des éléments en plastique encastrables les uns dans les autres (en particulier ceux des Editions Soral). On peut obtenir par exemple un tétraèdre, un cube et l'antiprisme de la figure (1) (deux pentagones réguliers et dix triangles équilatéraux). Au cours d'une réunion de la Régionale APMEP de Poitiers, **Claude Marcy** nous a montré un « polyèdre » constitué d'un pentagone régulier, de deux carrés et de sept triangles équilatéraux. Ce « polyèdre » d'une forme semblable au polyèdre de la figure (2), a été construit par des élèves de **Nicolas Minet** lors d'une étude de polyèdres réguliers ; mais l'assemblage est difficile à réaliser : il faut forcer sur les pièces pour les encastrer et elles ne sont pas très jointives. Il y a donc là un problème... que nous ont proposé nos deux collègues.

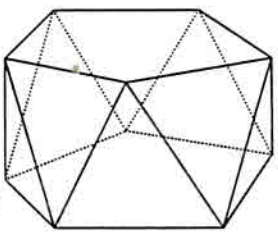


fig.1

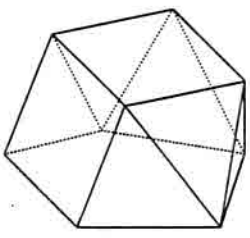


fig.2

Solution de Serge Parpay :

Effectivement le « polyèdre » ne peut exister avec les éléments indiqués.

1) Préambule :

Afin d'alléger les notations, et s'il n'y a pas d'ambiguïté, un polygone –ou un polyèdre– (ABC...F) sera noté simplement ABC...F, un segment [AB] sera noté AB, et si l est sa longueur, on écrira AB = l. On considérera le pentagone ABCDE et le décagone régulier AδBεCαDβEγ .$\mathcal{P}$ le plan du pentagone ABCDE ; c_5 la longueur des côtés du pentagone ; c_{10} la longueur des côtés du décagone ; r le rayon du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au pentagone et au décagone ; O le centre du cercle ; f, g, h, i les projections orthogonales de F, G, H et I sur le plan $\mathcal{P}$.

On suppose connues les propriétés du pentagone et du décagone (angles au centre, angles inscrits…), en particulier les longueurs $c_{10} = \dfrac{r\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}$, $c_5 = \dfrac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$. On établit facilement la relation : $c_5^2 - c_{10}^2 = r^2$.

2) On va d'abord considérer le **cas général d'un polyèdre convexe *P*** ayant les caractéristiques suivantes : sa base est le pentagone régulier ABCDE. Les faces AFIE et FGHI sont des rectangles, les faces ABF, EDI, BCG et DCH sont des triangles isocèles de bases respectives AB, ED, BC et DC (fig.3).
Ce polyèdre a un plan de symétrie, le plan médiateur des segments AE, FI et GH. Ce plan, perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, contient la droite γC. Le triangle CGH est par conséquent un triangle isocèle de base GH.
On se reportera aux figures ci-dessous : fig.4 (vue « de profil »), fig.5 (projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$).
Les deux rectangles AFIE et FGHI se projettent en les rectangles AfiE et fghi (propriété de la projection orthogonale de rectangles ayant deux côtés opposés parallèles au plan de projection) :
- les points f et g sont sur la perpendiculaire en A à AE, c'est-à-dire la droite Aε.
- les points i et h sont sur la perpendiculaire en E à EA, c'est-à-dire la droite Eα.

Les triangles isocèles ABF, EDI, BCG, DCH et CGH se projettent en les triangles isocèles ABf, EDi, BCg, DCh et Cgh, de bases respectives AB, ED, BC, DC et gh.
- les points f, i, g et h sont respectivement sur les rayons Oδ, Oβ, Oε et Oα du cercle $\mathcal{C}$.

Compte tenu des deux paragraphes précédents, la position des points f, g, h et i est complètement définie : g en ε, h en α. AfBδ et EiDβ sont des losanges, donc Af = Aδ = Eβ = Ei.
Cette étude justifie l'existence du polyèdre *P* : les différentes faces sont parfaitement déterminées connaissant les longueurs des côtés des deux rectangles.

fig.3

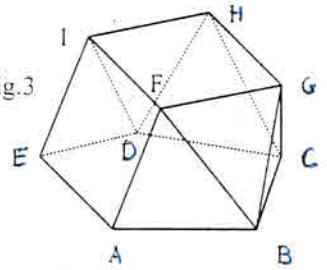


fig.4

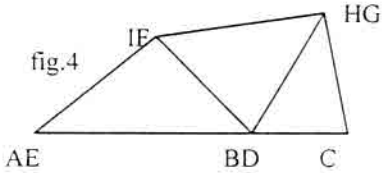


fig.5

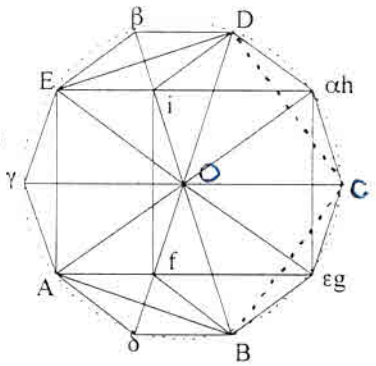


fig.6

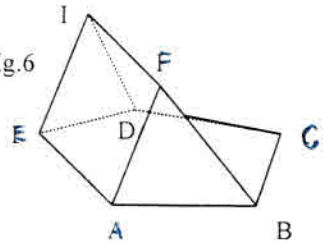
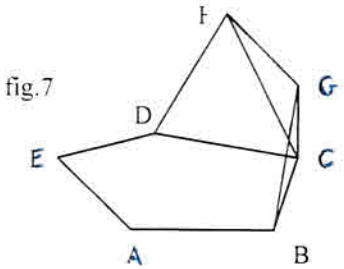


fig.7



Les côtés AF, EI, DI, BF, CG, BG, CH et DH de même longueur c_5 se projettent en les segments Af, Ei, Di, Bf, Cg, Bg, Ch et Dh de même longueur c_{10}. Par suite les points F, I, G et H sont à même distance du plan $\mathcal{P}$. Le rectangle FGHI est dans un plan parallèle à $\mathcal{P}$. Ce rectangle se projette en vraie grandeur.
Of est parallèle à Cg ; fg est parallèle à OC. OfgC est un parallélogramme, fg = OC = *r*, et, par conséquent : FG = IH = *r*. La face FGHI est un rectangle de côtés c_5 et *r*.
Les triangles BFG et DIH sont des triangles isocèles.
Tous les éléments du polyèdre sont ainsi déterminés : **il n'y a qu'un seul polyèdre répondant aux conditions imposées ci-dessus : AFIE est un carré, ABF, EDI, BCG, DCH et CGH sont des triangles équilatéraux,** les triangles BFG et DIH, le rectangle FGHI étant nécessairement ceux définis ci-dessus.

3) Revenons alors au « polyèdre » proposé dans l'énoncé : AFIE est un carré, ABF, EDI, BCG et DCH sont des triangles équilatéraux. Le polyèdre ne pourrait être que le polyèdre précédent. On ne peut avoir FIGH carré ni BFG et DIH équilatéraux **: la construction de ce « polyèdre » est impossible.**
Une solution plus détaillée du problème a été également rédigée. Elle peut être communiquée à votre demande.
Serge Parpay, 22 rue Alphonse Rougier, 79000 NIORT.

61-1 *de Sébastien Peyrot* :
On dispose de 5 poids pesant chacun un nombre entier de kilogrammes pour peser tous les poids de 1 kg à 121 kg inclus par combinaison de ces cinq poids. Quels sont ces cinq poids ?
Solution de Frédéric de Ligt :
On sait que tout entier compris entre 0 et $3^5 - 1$ s'exprime de façon unique sous la forme $a_4 3^4 + a_3 3^3 + a_2 3^2 + a_1 3^1 + a_0 3^0$

où les a_i peuvent valoir 0, 1 ou 2. En ôtant $3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0$ à cette expression, on obtient que tout entier compris entre -121 et 121 s'exprime de façon unique sous la forme $a_4 3^4 + a_3 3^3 + a_2 3^2 + a_1 3^1 + a_0 3^0$ où les a_i peuvent valoir -1, 0 ou 1. Tout entier compris entre 1 et 121 peut donc s'écrire de façon unique sous cette dernière forme. Cette écriture peut elle-même se décomposer d'une seule manière en :

$$(b_4 3^4 + b_3 3^3 + b_2 3^2 + b_1 3^1 + b_0 3^0) - (c_4 3^4 + c_3 3^3 + c_2 3^2 + c_1 3^1 + c_0 3^0)$$

où les b_i et les c_i peuvent valoir 0 ou 1, $b_i - c_i = a_i$ et $b_i c_i = 0$.
Le second terme de cette expression représente bien sûr les masses éventuellement placées sur le même plateau que l'objet à peser et finalement les cinq masses nécessaires sont 1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg et 81 kg.

63-3 *de Nathalie Chevalarias* :
Lors du séminaire de rentrée de l'IREM de Poitiers, le 16 septembre dernier, Nathalie Chevalarias nous a présenté un outil de menuisier servant à dessiner des ellipses. Cet outil est constitué de deux pièces en bois ; l'une de forme carrée dans laquelle l'artisan a pratiqué deux rainures selon les diagonales ; l'autre de forme rectangulaire dont les deux sommets d'une largeur vont pouvoir coulisser dans les rainures . Un crayon est fixé au milieu de l'autre largeur.
Vous devez savoir aussi que la largeur de la pièce rectangulaire vaut exactement la moitié de la diagonale du carré.
Pourriez-vous montrer simplement que le crayon a effectivement dessiné une ellipse quand la planche rectangulaire a effectué un mouvement complet ?

Solution de Serge Parpay :
Eléments de démonstration.
On peut schématiser l'ellipsographe proposé par le dessin (fig.1), puis compléter la figure par le carré MQNP (fig.2), ce qui fait apparaître une « barre PQS », second ellipsographe dont il sera question ci-après.

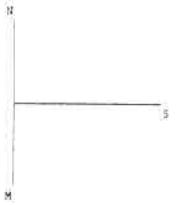
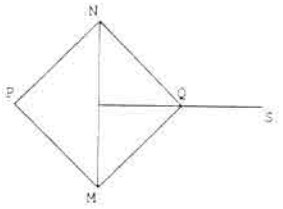
fig.1 

fig.2 

Soit les droites orthogonales D et D' et leurs bissectrices Δ et Δ' (figures 3 et 4). Quand les points M et N sont sur les droites Δ et Δ', les points Q et P sont sur les droites D et D'.
La démonstration est laissée au lecteur (on pourra utiliser le cercle circonscrit au carré MQNP). Plusieurs cas de figures sont à considérer, en particulier ceux des

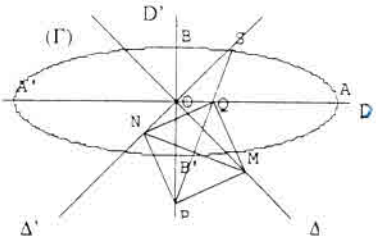
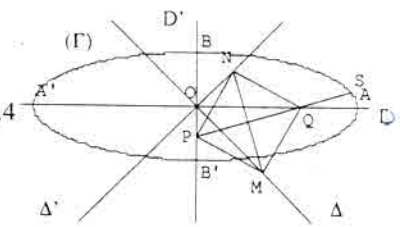
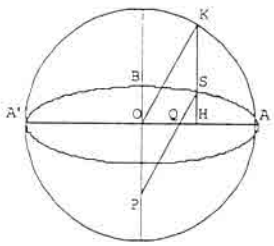
fig.3 

fig.4 

figures 3 et 4.

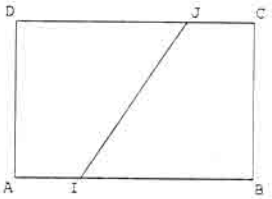
On est ramené ainsi à considérer l'ellipsographe (« barre PQS ») utilisant le « procédé de la bande de papier » : le point S décrit l'ellipse (Γ) de centre 0 et d'axes AA' et BB' — (OA = PS, OB = QS). On peut aussi tracer l'ellipse (Γ') déduite de (Γ) par la rotation de centre O et d'angle 90°. Le tracé dépend du trajet suivi par M et N pour le premier ellipsographe, du trajet suivi par P et Q pour le second.

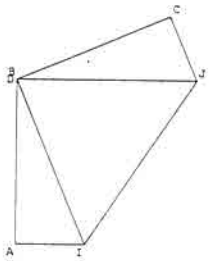


Remarque : Il est intéressant de faire l'expérience avec un système de barres en bois ou un transparent sur lequel est dessinée la figure 2.

Complément : L'ellipse est la figure transformée du cercle principal dans l'affinité orthogonale de rapport b/a et d'axe le grand axe AA' (OA = a et OB = b). On raisonne sur la figure ci-dessous : soit le parallélogramme OPSK et les triangles semblables HSQ et HKO. Si S est sur l'ellipse alors PS = a, donc QS = b. Réciproquement si PS = a et QS = b... S est sur l'ellipse). Le procédé de la bande de papier découle de cette propriété.

64-2 *de Chantal Gobin* :
L'énoncé suivant a été proposé au Rallye du Centre :
Montrer que, quelque soit le rectangle, le rapport
(longueur du pli) / (longueur de la diagonale)
est égal au rapport
(largeur du rectangle) / (longueur du rectangle).





Solution de Frédéric de Ligt :
On raisonne sur la figure rectangulaire. On remarque tout d'abord que les points B et D sont symétriques par rapport à la droite (IJ). En utilisant cette symétrie et le parallélisme des côtés du rectangle, on montre ensuite que les angles opposés du quadrilatère convexe BIDJ sont de même mesure. On en déduit, avec l'égalité des longueurs BJ et JD, que BIDJ est un losange. Ses diagonales sont donc perpendiculaires et se croisent en leur milieu. Si on note O leur point d'intersection, les triangles rectangles OJD et BCD sont semblables comme ayant l'angle $\hat{D}$ en commun.
On a finalement : OJ / OD = IJ / DB = CB / DC.