RU - BRI - COL - AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Pour entamer ce premier bulletin de l'année 2006 dans la bonne humeur :
« Quand je suis arrivé à l'école, ce matin, les copains parlaient du problème d'arithmétique.
- Moi, comme réponse, ça me donne 3 508 œufs, a dit Geoffroy. Eudes, ça l'a fait drôlement rigoler, ça.
- Hé, les gars ! il a crié. A Geoffroy, ça lui fait 3 508 œufs !
- À moi aussi, a dit Agnan, qui est le premier de la classe et le chouchou de la maîtresse.
Alors, Eudes s'est arrêté de rigoler et il est parti au fond de la cour pour faire des corrections sur son cahier.
Joachim et Maixent avaient le même résultat : 3,76 œufs. Quand il y a des devoirs difficiles, Joachim et Maixent se téléphonent et la maîtresse leur met souvent un zéro à chacun. Mais cette fois-ci, ils nous ont dit qu'ils étaient tranquilles, parce que c'étaient leurs pères qui s'étaient téléphoné.
- Et toi, tu as combien ? m'a demandé Alceste.
- Moi, je n'ai rien du tout, j'ai dit. Moi, j'ai une excuse.
Et j'ai montré la carte de visite de papa aux copains. »
Goscinny et Sempé, *Histoires inédites du petit Nicolas*, IMAV éditions, 2004.

Poursuivons avec les belles lectures de Léa Broutille :

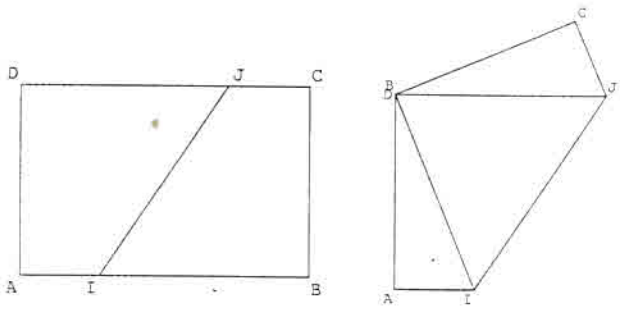
On peut définir au compas
De tout ce qu'on voit ici bas
La forme en rond unie :
Mais on ne saurait mesurer
Le mal, que me fait endurer
Mon amour infinie.
Au centre, autour duquel se fait
Du monde le cercle parfait
Toutes les lignes se tendent :
Et le divin de vos beautés
Est le point où mes volontés
Egalement se rendent
...

- Chansons - Joachim de Bellay (1549)

Des problèmes

64-1 *Ex.23, p.79, Magnard 4e (avril 2002)* :
Deux droites sécantes et un point extérieur à ces deux droites sont donnés. Construire un cercle tangent aux deux droites et passant par le point M. Une méthode niveau 4ème ?

64-2 *de Chantal Gobin (Loudun)* :
L'énoncé suivant a été proposé au Rallye du Centre :
Montrer que, quelque soit le rectangle, le rapport (longueur du pli) / (longueur de la diagonale) est égal au rapport (largeur du rectangle) / (longueur du rectangle).



64-3 *de Thierry Sageaux (Bordeaux)* :

Trouver tous les couples d'entiers (a, b) non triviaux vérifiant $a^{b^2} = b^a$.

Des solutions

61-5 *(Marc Blanchard)* :
Montrer que pour tout entier $m > 0$, il existe une infinité de termes de la suite de Fibonacci qui sont divisibles par m. On rappelle que les nombres de Fibonacci sont définis par : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$; $F_0 = F_1 = 1$.

Solution de Jean-Christophe Laugier :

Considérons la suite de Fibonacci *modulo m*, c'est-à-dire la suite (f_n) définie par : $f_n := F_n \bmod m$ (reste de la division euclidienne de F_n par m).

Cette suite prend ses valeurs dans $\{0, 1, ..., m-1\}$. La suite infinie des couples (f_n, f_{n+1}), avec $n \geq 0$, prend donc au plus m^2 valeurs distinctes. Il en résulte qu'il existe $n_0 \geq 0$ et $p > 0$ tels que $f_{n_0} = f_{n_0+p}$ et $f_{n_0+1} = f_{n_0+1+p}$: on peut supposer les deux égalités précédentes satisfaites avec n_0 *minimal*, auquel cas $n_0 = 0$. En effet, si $n_0 > 0$, il vient :

$$f_{n_0-1} = f_{n_0+1} - f_{n_0} = f_{n_0+1+p} - f_{n_0+p} = f_{n_0-1+p}\ ,$$

et ceci est en contradiction avec la minimalité de n_0.

On a donc $f_p = f_0 = 1$, $f_{p+1} = f_1 = 1$ et par conséquent $f_n = f_{n+p}$ pour tout $n \geq 0$, comme on le montre aisément par récurrence sur n. La suite (f_n) est donc périodique de période p. Puisque $f_p = f_{p+1} = 1$, alors $f_{p-1} = 0$ d'où $f_{p-1+kp} = 0$ pour tout $k \geq 0$. F_n est donc divisible par m pour une infinité de valeurs de n.

62-3 *(concours général 2005)* :

Soit f une fonction de $[0 ; 1]$ vers **R**, continue sur $[0 ; 1]$, telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que pour tout x de $[0 ; 7/10]$ $f(x + 3/10) \neq f(x)$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions dans $[0 ; 1]$.

Solution de Jean-Christophe Laugier :

À la lecture de l'énoncé, on devine que le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas loin ! La fonction $x \mapsto f(x + 3/10) - f(x)$ est continue et ne s'annule pas sur $[0 ; 7/10]$ par hypothèse. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle garde donc un signe constant sur $[0 ; 7/10]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(x + 3/10) > f(x)$ pour tout $x \in [0 ; 7/10]$. Il vient :

$$f(0) = 0 < f(3/10) < f(6/10) < f(9/10) \text{ et } f(1) = 0 > f(7/10) > f(4/10) > f(1/10).$$

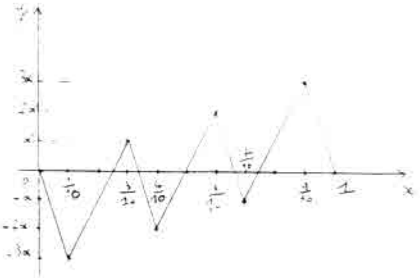
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc sur chacun des intervalles $]1/10 ; 3/10[$, $]3/10 ; 4/10[$, $]4/10 ; 6/10[$, $]6/10 ; 7/10[$, $]7/10 ; 9/10[$. Puisque $f(0) = f(1) = 0$, f s'annule bien au moins sept fois sur $[0 ; 1]$.

Peut-on à present donner un exemple simple de fonction f vérifiant les hypothèses de l'énoncé ?

Pour que $f(x + 3/10) \neq f(x)$ pour tout $x \in [0 ; 7/10]$, il suffit que : $f(x + 3/10) - f(x) = \alpha$ (α nombre positif donné) soit :

$$f(x + 3/10) = f(x) + \alpha \quad \text{pour tout } x \in [0 ; 7/10] \quad (1)$$

Une fonction f vérifiant (1) est déterminée sur $[0 ; 1]$ dès qu'on la connait sur $[0 ; 3/10]$. On devra avoir d'autre part $f(3/10) = \alpha$ car $f(0) = 0$ et $f(1/10) = f(1 - 3 \times 3/10) = -3\alpha$ car $f(1) = 0$. On a donc finalement à se donner une fonction f continue sur $[0 ; 3/10]$ telle que $f(0) = 0$, $f(1/10) = -3\alpha$, $f(3/10) = \alpha$ que l'on prolonge à $[0 ; 1]$ au moyen de (1). Voici un exemple d'une telle fonction :



62-5 *(magazine logimath)* :

À un congrès il y a 2005 participants. Chacun est repéré par son numéro d'inscription. Le congressiste n°1 a donné une poignée de mains, le congressiste n°2 a donné 2 poignées de mains, le congressiste n°3 a donné 3 poignées de mains, etc. Jusqu'au congressiste n°2004 qui a donné 2004 poignées de mains.

Combien de poignées de mains a données le 2005[ème] congressiste ?

Solution de Jean-Christophe Laugier :

Considérons le graphe simple G ayant pour sommets les 2005 personnes et pour arêtes les paires $\{i, j\}$ telles que i et j se soient serré la main. On sait donc que le degré du sommet i est i pour tout i = 1, 2, ..., 2004 et il s'agit de déterminer le degré du sommet 2005. L'énoncé affirme implicitement l'existence d'un tel graphe. Nous allons nous en assurer en démontrant le résultat suivant :

Pour tout ensemble fini $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ($n \geq 2$), il existe un graphe simple unique G admettant pour ensemble de sommets X et tel que pour tout $i = 1, 2, ..., n - 1$, x_i ait pour degré i. Si l'on pose d_n = degré de x_n dans G, on a alors la relation : $d_n = d_{n-2} + 1$ pour ($n \geq 4$).

Démonstration par récurrence sur n.

Le résultat est vrai pour n = 2. Dans ce cas, G admet comme seule arête $\{x_1, x_2\}$ et $d_2 = 1$.

Le résultat est vrai pour n = 3. Dans ce cas, les arêtes de G sont $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$ et $d_3 = 1$.

Supposons le résultat établi pour tous les entiers inférieurs à n ($n \geq 4$).

Soit donc $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et G = (X, A) un graphe d'ensemble de sommets X et d'ensemble d'arêtes A. Alors G vérifie la condition : pour tout $i = 1, 2, ..., n - 1$, x_i a pour degré i si et seulement si A contient les arêtes $\{x_i, x_{n-1}\}$ ($i = 1, 2, ..., n-2, n$)

(condition équivalente à degré de x_{n-1} = n - 1) et le sous-graphe G' d'ordre n - 2 de G ayant pour ensemble de sommets $X' = X \setminus \{x_1, x_{n-1}\} = \{x_2, \dots, x_{n-2}, x_n\}$ et pour ensemble d'arêtes $A' = A \setminus \{\{x_i, x_{n-1}\} / \ i = 1, 2, \dots, n-2, n\}$ vérifie la condition : pour tout i = 2, ... n -2, x_i a pour degré i - 1.
D'après l'hypothèse de récurrence, A' existe et est unique et cela prouve l'existence et l'unicité de A puisque $A = A' \cup \{\{x_i, x_{n-1}\} / \ i = 1, 2, \dots, n-2, n\}$.
D'autre part, on voit que le degré de x_n dans G est égal au degré de x_n dans G' augmenté de 1 d'où $d_n = d_{n-2} + 1$.
Il résulte de la relation $d_n = d_{n-2} + 1$ et de $d_2 = d_3 = 1$ que : $d_{2p} = d_{2p+1} = p$ pour tout $p \geq 1$.
Nous pouvons à présent revenir à notre congrès ! Puisque $d_{2005} = 1002$, le 2005^e congressiste a donné 1002 poignées de main.

62-6 *(Jean-Christophe Laugier)* :
Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des entiers naturels k et l tels que $n = E(k\sqrt{2} + l\sqrt{3})$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Voici les deux solutions reçues. L'une assure l'existence de tels couples alors que l'autre exhibe deux familles possibles.

Solution de Raymond Barra :

Je note E l'ensemble des nombres $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ avec (a, b) dans $\mathbf{N}^2$, et je choisis un entier $n \geq 3$ (la fin dira pourquoi). J'introduis le sous-ensemble des nombres $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ avec $a \geq 2$ et qui sont strictement inférieurs à n (strictement est de trop car les nombres de E ne sont pas entiers sinon $\sqrt{6}$ serait rationnel). Ce sous-ensemble n'est pas vide, il contient $2\sqrt{2}$, et est fini (les nombres $a\sqrt{2}$ inférieurs à n sont en nombre fini et donc aussi les nombres $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$), il a donc un plus grand élément que je note A, $A < n$, et que j'écris $u\sqrt{2} + v\sqrt{3}$. Je note B le nombre $(u + 1)\sqrt{2} + v\sqrt{3}$. Par définition de A, $B - A = \sqrt{2}$ et $B \geq n$.
Si $B < n + 1$, alors n est la partie entière de B.
Si $B \geq n + 1$, alors $B - A \geq n + 1 - A$; $\sqrt{2} \geq n + 1 - A$ donc $n + 1 - \sqrt{2} \leq A < n$.
Par conséquent $n + 1 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \leq A - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < n - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. Or $0 < 1 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 1/4$ et $0 < -2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 1$.
Donc $A - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ qui est égal à $(u - 2)\sqrt{2} + (v + 2)\sqrt{3}$ est dans $[n ; n + 1[$.
Et ce nombre est dans E puisque $u - 2 \in \mathbf{N}$ et $v + 2 \in \mathbf{N}$. Lorsque $n = 1$, n est $E(\sqrt{2})$; et $n = 2$ est la partie entière de $2\sqrt{2}$.

Solution de Serge Parpay :

On a $0 = E(0\sqrt{2} + 0\sqrt{3})$, $1 = E(1\sqrt{2} + 0\sqrt{3}) = E(0\sqrt{2} + 1\sqrt{3})$, $2 = E(2\sqrt{2} + 0\sqrt{3})$. On supposera dans la suite que $n \geq 3$.
Tout nombre n est compris dans un intervalle $I = [a\sqrt{2}, (a + 1)\sqrt{2}]$ avec $a = E(n/\sqrt{2})$. Comme $n \geq 3$ alors $a \geq 2$. Reportons cet intervalle sur l'axe des réels avec A $(a\sqrt{2})$, A'$((a + 1)\sqrt{2})$. L'amplitude de I est AA' c'est-à-dire $\sqrt{2}$, il existe donc un ou deux entiers entre A et A'. Soit C le point d'abscisse $(a - 2)\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$, on a $AC = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < 1$ et $CA' = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} < 1$. L'entier n est dans l'intervalle [AC] ou [CA']. Le deuxième entier possible étant alors dans l'autre intervalle.
Donc $n = E((a + 1)\sqrt{2} + 0\sqrt{3})$ ou $n = E((a - 2)\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$. On peut définir un couple (k, l), $(k, l) = (a + 1, 0)$ ou $(k, l) = (a - 2, 2)$ suivant les cas. On peut trouver d'autres couples. Selon la même méthode, on utilise l'intervalle $J = [b\sqrt{3}, (b + 1)\sqrt{3}]$ avec $b = E(n/\sqrt{3})$. On choisit alors pour abscisse de C : $(b - 2)\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$. Ce choix impose $b \geq 2$, donc $n > 2\sqrt{3}$, d'où $n \geq 4$.
On peut obtenir 3 directement $3 = E(0\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) = E(1\sqrt{2} + 1\sqrt{3})$. Les deux méthodes précédentes « se complètent ». Le tableau ci-dessous « montre » qu'il y a plusieurs couples (k, l) tels que $n = E(k\sqrt{2} + l\sqrt{3})$ pour toute valeur de n sauf $n = 0$ et $n = 2$. On peut analyser ce tableau et raisonner à partir de la variation « conjointe » de k et l pour une même valeur de n ($\sqrt{3} - \sqrt{2}$ étant le lien entre deux cases successives).

$k \setminus l$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	4	5	7	8	9
1	1	3	4	5	7	8	10	11
2	3	4	6	7	9	10	11	13
3	5	6	8	9	11	12	13	15
4	6	8	9	11	12	14	15	16
5	8	10	11	12	14	15	17	18
6	10	11	13	14	16	17	18	20
7	12	13	14	16	17	19	20	21

Exemples pour les 2 méthodes : $5\sqrt{2} < 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 8 < 6\sqrt{2}$; $6\sqrt{2} < 9 < 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 10 < 7\sqrt{2}$; $7\sqrt{3} < 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2} < 13 < 8\sqrt{3}$; $8\sqrt{3} < 14 < 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2} < 15 < 9\sqrt{3}$.

Rectificatif au Corol'aire n°63.
Dans la solution au problème 62-2 donnée par Jacques Chayé, il faut rétablir les barres des mesures algébriques au 2) :
L'énoncé de Thalès permet d'écrire : $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$ et aussi $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OC'}}$ d'où, en multipliant membre à membre $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}$.
Grâce à la réciproque de l'énoncé de Thalès, on en déduit le parallélisme de (BB') et (CC').
N.d.l.r. : Nous vous prions de nous excuser pour cette coquille qui est de notre fait.