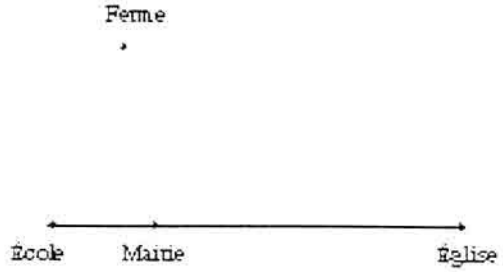
Défi Collège

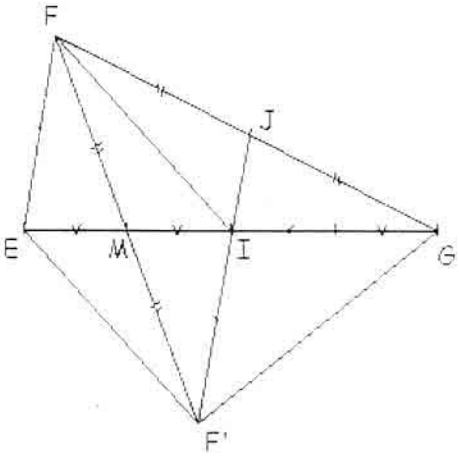
Dans mon village, il n'y a qu'une seule route toute droite sur laquelle on rencontre successivement l'école, puis 100 mètres plus loin la mairie, puis 300 mètres plus loin l'église. Notre ferme se trouve au milieu des champs, deux fois plus éloignée de l'église que de la mairie. À quelle distance est-elle de l'école ?

Ce problème posé dans le numéro 62 de Corol'aire a suscité de nombreuses réponses.



Solution 1

Cette première solution de Bruno Alaplantive de Pamiers n'utilise que des outils du collège.

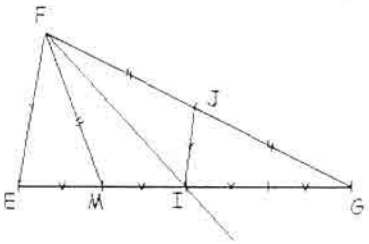


Considérons le point F' symétrique de F par rapport à M. EFIF' est un parallélogramme. Donc FE = F'I.
Soit J le milieu de [FG]. Le triangle F'FG est isocèle de sommet F. [GM] et [F'J] en sont deux médianes issues des sommets de la base et donc I qui est situé sur [MG] aux deux tiers à partir de G est aussi sur la médiane [F'J] aux deux tiers à partir de F'. Comme le triangle est isocèle, ces deux médianes ont même longueur. Donc FE = F'I = GI = 200 m et ceci quelle que soit la position de F. Le point F est donc sur un cercle de centre E et de rayon 200 m.

Maryvonne Le Berre de Lyon utilise aussi le triangle isocèle F'FG dont I est le centre de gravité, déduit l'égalité IJ = IM et conclut avec l'énoncé des milieux dans le triangle EFG.

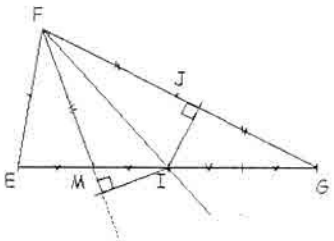
Solution 2

Cette deuxième solution de Gérard Guillet, de Niort, dépasse en partie le niveau collège.



Dans le triangle EFG, I et J étant les milieux respectifs de [EG] et [FG], on a FE = 2IJ.
Dans le triangle FMG, la bissectrice de l'angle MFG partage le côté MG dans le rapport des longueurs des côtés FM et FG. Or ce rapport est égal à 1/2 ; donc la bissectrice coupe le côté [MG] en I. (FI) est axe de symétrie du triangle isocèle MFJ. Donc IJ = MI et donc FE = 200 m.

Remarque : le théorème utilisé concernant la bissectrice peut être contourné à l'aide d'une démonstration par les aires (Bruno Alaplantive). (dessin 3)



L'aire du triangle FMI est la moitié de celle du triangle IFE. Donc les hauteurs issues de I ont la même longueur et donc (FI) est la bissectrice de l'angle MFJ.

Bruno Alaplantive nous communique les trois autres solutions suivantes utilisant des outils de lycée.

Solution 3 (calcul vectoriel – barycentre)

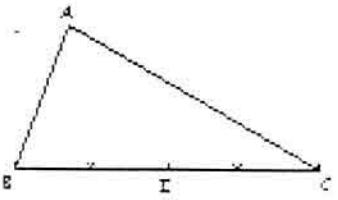
M et G étant fixés, quel est le lieu de F tel que FG = 2 FM ?
Tout étant positif, on a $FG^2 - 4\,FM^2 = 0$.
On introduit le barycentre de (G,1) et (M, –4). On a :

$$0 = \|\overrightarrow{FG}\|^2 - 4\|\overrightarrow{FM}\|^2 = \left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EG}\right)^2 - 4\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EM}\right)^2$$
$$0 = FE^2 + 2\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{EG} + EG^2 - 4FE^2 - 8\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{EM} - 4EM^2$$
$$0 = -3FE^2 + EG^2 - 4EM^2 + 2\overrightarrow{FE}\left(\overrightarrow{EG} - 4\overrightarrow{EM}\right)$$
$$0 = -3FE^2 + (4EM)^2 - 4EM^2$$

$$3FE^2 = 12EM^2$$
$$FE^2 = 4EM^2$$
$$FE = 2EM$$

Conclusion de l'auteur : « *C'est beau comme du calcul...* »

Solution 4 (calcul)



Cette solution repose sur le résultat suivant : $2AI^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{(2BC)^2}{2}$
appliqué aux triangles FEI et FEG.

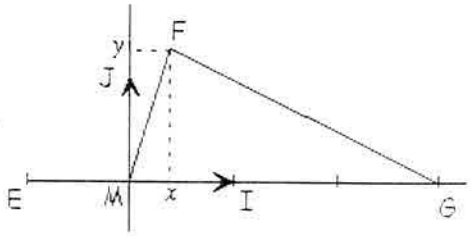
$2FM^2 = FE^2 + FI^2 - \frac{(2EM)^2}{2}$ *donc* $2x^2 = FE^2 + FI^2 - 2EM^2$ (1)

$2FI^2 = FE^2 + FG^2 - \frac{(4EM)^2}{2}$ *donc* $FI^2 = \frac{1}{2}FE^2 + 2x^2 - 4EM^2$ (2)

(1)+(2) $2x^2 + FI^2 = \frac{3}{2}FE^2 + FI^2 + 2x^2 - 6EM^2$

Après simplification, on obtient : $\frac{3}{2}FE^2 = 6EM^2$, *soit* $FE^2 = 4EM^2$ *et donc* $FE = 2\ EM$.

Solution 4 (géométrie analytique) (Dessin 5)



Dans le plan repéré comme indiqué sur le dessin, si F (x, y) alors $\overrightarrow{FG}\ (3-x, -y)$.
FG = 2 FM. Donc $FG^2 = 4\ FM^2$. $(x-3)^2 + y^2 = 4(x+y)^2$.
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$.
$-3x^2 - 6x + 9 - 3y^2 = 0$. En divisant par 3, on obtient :
$x^2 + 2x - 3 + y^2 = 0$; ou encore $(x+1)^2 - 1 - 3 + y^2 = 0$, et donc $(x+1)^2 + y^2 = 4$.
Le point F est donc sur le cercle de centre E $(-1, 0)$ et de rayon 2.

Maryvonne Le Berre a rapproché ce problème de cet autre :

Dans un triangle ABC tel que BC = 2AB, placer le point M sur le segment [AC] tel que MC = 2 AM.

Comparer les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{CBM}$.
Bonne recherche !