Edito

"Les mathématiques françaises sont les meilleures au monde"

Ainsi s'exprimait, dans un entretien au Monde du 7 février 2006, Catherine Bréchignac, physicienne, nouvelle présidente du CNRS, où elle vient d'augmenter de 4 % la dotation des mathématiques.
Le journal rapproche cette politique de celle du gouvernement des Etats-Unis, qui pour faire face aux concurrences chinoise et indienne veut doubler en dix ans le budget de la recherche, renforcer l'enseignement des sciences en général et des mathématiques en particulier.
En France cette volonté se heurte à une réalité mise en lumière par un rapport récent du groupe aéronautique EADS-France : les entreprises déplorent la baisse du niveau scientifique des jeunes ingénieurs embauchés, notamment en mathématiques et en physique. Ce constat est relayé par les écoles d'ingénieurs, qui mettent en cause le niveau des élèves sortant des classes préparatoires scientifiques.
On peut ainsi remonter la chaîne de la formation jusqu'à l'école élémentaire. Le Haut Conseil de l'Education, mis en place à l'automne dernier conformément à la loi Fillon, réfléchit ainsi au « socle commun des indispensables » que doivent acquérir tous les élèves. Dans ce socle commun, le rapport Thélot mettait en bonne place les bases des mathématiques. Notons pour la petite histoire que le HCE a écarté de son sein Laurent Lafforgue, brillant mathématicien[1] mais aux théories pédagogiques d'un autre âge, dont les propos outranciers « risquaient de nuire à la sérénité des débats ».
Pour l'APMEP, les difficultés s'expliquent au moins en partie par la baisse des horaires de mathématiques au collège et au lycée décidée il y a une dizaine d'années. Il en résulte en effet pour l'ensemble des élèves à la fois une diminution des compétences scientifiques et un découragement devant la difficulté à les acquérir. Ces deux points noirs de notre enseignement ont été soulignés par le rapport PISA 2003[2].
Devant cette crise, l'APMEP préconise entre autres le retour à des horaires décents, sans augmentation des volumes de contenus, pour permettre aux élèves de réfléchir, de chercher, de construire sans angoisse leurs savoirs et leurs savoir-faire.
Cela suppose de recruter et de former suffisamment d'enseignants. Ce n'est certainement pas en diminuant fortement le nombre de postes au CAPES, comme on vient de le faire, qu'on y parviendra !
Si les mathématiques françaises sont les meilleures au monde, ce que l'on a plaisir à croire, faisons en sorte qu'elles le restent !

Louis-Marie BONNEVAL

[1] Cf. Corol'aire n° 50.
[2] Cf. Corol'aire n°59 et Bulletin vert n°462, p.105.

SOMMAIRE

Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l' Enseignement
Public

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

APMEP

n°64
Mars 2006

Dispensé de timbrage | Poitiers Centre de tri

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

P
PRESSE
DISTRIBUÉ PAR
LA POSTE

DÉPOSÉ LE 06-03-2006

FREDERIC DE LIGT
3 RUE DE LA PIERRIERE
17270 MONTGUYON
0202

APMEP : http://irem.univ-poitiers.fr/apmep
Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Le numéro : 1 € .
Abonnement 1 an (4 numéros) : 3,5 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur	Louis-Marie BONNEVAL
Comité de rédaction ...	C. BLOCH, S. PARPAY, J. FROMENTIN, F. DE LIGT
Imprimerie	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Editeur	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P.	n° 73 802
Dépôt légal	Mars 2006

La Rochelle 2008

Rappelons que l'assemblée générale du 7 décembre dernier de notre Régionale a proposé d'organiser les Journées Nationales de l'APMEP en 2008 à La Rochelle. Corol'aire vous informera régulièrement de la préparation de ces Journées.

Compte rendu de la réunion du 1er février 2006

Dates : Le calendrier des vacances scolaires n'est pas encore connu. Pour celles de la Toussaint 2008, on peut envisager deux possibilités : soit du mercredi 22 octobre au lundi matin du 3 novembre, soit du samedi 25 octobre au jeudi matin du 6 novembre. Pour les Journées, nous retenons donc les dates suivantes : **samedi 25 octobre, dimanche 26 octobre et lundi 27 octobre.**

Thème : l'idée déjà suggérée **"Mathématiques en construction"** paraît intéressante, car elle englobe à la fois :

- la construction des mathématiques (leur histoire et leur développement actuel)
- le rôle des mathématiques dans la construction de bâtiments, de bateaux, de machines…
- la construction des savoirs et des savoir-faire mathématiques chez l'élève.

Il faudra veiller à ce que les conférences comme les ateliers soient en harmonie avec le thème, et qu'ils fassent un bon équilibre entre le national et le local.

Lieu : le pôle sciences, que nous avons visité le 23 novembre, paraît convenir. Mais il n'a pas d'amphithéâtre de 800 places, ce qui impose de réserver l'espace Encan pour le samedi matin (accueil, conférence inaugurale) et le lundi après-midi (assemblée générale, conférence finale). Pour les exposants, le Technoforum serait la meilleure solution. Pour la restauration, il y a deux restaurants universitaires.

Le directeur du pôle sciences, Pierre Miramand, a donné son accord de principe. Des contacts seront pris avec le président de l'université ainsi que le directeur du CROUS.

Hébergement : il y a suffisamment d'hôtels, mais il faut étudier les autres possibilités, d'autant plus qu'il risque d'y avoir en même temps un festival du film documentaire.

Contacts

Le point est fait sur les contacts à prendre : l'Université et le CROUS ; les collectivités locales : Ville de La Rochelle, Département de Charente-Maritime, Région Poitou-Charentes ; l'administration : Rectorat de Poitiers, Inspection Académique, IPR ; les sponsors : MAIF, MGEN,… Sans oublier bien sûr l'IREM, l'IUFM et l'APMEP nationale. Louis-Marie Bonneval a préparé un dossier de présentation de la Régionale de l'APMEP et Dominique Souder prend des contacts pour la réalisation d'une affiche et d'un logo.

Notre fonctionnement

Coordination : Louis-Marie Bonneval, Vincent Fielbard, Jean Fromentin.

Contacts : Louis-Marie Bonneval, Vincent Fielbard, Jean Fromentin, Jean Morin, Jackie Citron, Daniel Daviaud, Jean-Marie Guillard.

Hébergement-restauration : Jean-Mathieu Bernat, Jean Trijaud.

Loisirs-accompagnants-produits locaux : Dominique Souder, Jean Morin, Daniel Daviaud.

Ateliers-conférences : Jean-Paul Guichard, Sébastien Peyrot, Nicolas Minet.

Inscriptions : Samuel Dussubieux

Trésorerie : Jacques Chayé.

Exposants : Jean Fromentin.

Matériel : Jean-Pierre Guillard.

Transports : Jean Morin.

Chaque équipe peut recruter d'autres membres. Elle prend les initiatives utiles et informe la cellule de coordination.

Notre site http://irem.campus.univ-poitiers.fr/apmep/ sera aussi un outil pour suivre l'avancée du travail.

La prochaine réunion est fixée au mercredi 7 juin à 15 h à la Faculté des Sciences de La Rochelle.

Louis-Marie Bonneval

Les modèles mathématiques de l'atmosphère

Une trentaine de collègues étaient présents mercredi 1er février à La Rochelle pour la conférence de Jean Coiffier, ingénieur retraité de la Météorologie Nationale.

Il nous a expliqué les outils et les difficultés de la prévision météorologique. Fondée sur les lois de la thermodynamique (principalement les équations de Navier-Stokes), elle est performante à deux conditions :

- que les observations (qui fournissent les conditions initiales) soient précises et fiables ;
- que les calculs (très importants puisque les équations se résolvent par discrétisation de l'espace et du temps) puissent se faire en un temps raisonnable.

Les progrès viennent d'une part de l'accroissement de la puissance des ordinateurs, d'autre part de l'affinement des modèles, grâce à une confrontation permanente entre les prévisions et les réalités observées.

La conférence a bien montré le rôle décisif des mathématiques dans ce domaine : équations aux dérivées partielles, méthodes numériques de résolution, méthodes statistiques d'adaptation des modèles.

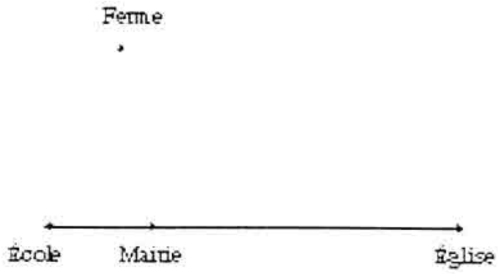
Appel

La régionale cherche à constituer une collection complète de Bulletins Verts. Elle cherche notamment les numéros 1 à 178.
Si un collègue en possède des exemplaires et accepte de s'en dessaisir, merci de nous contacter à
apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr

Défi Collège

Dans mon village, il n'y a qu'une seule route toute droite sur laquelle on rencontre successivement l'école, puis 100 mètres plus loin la mairie, puis 300 mètres plus loin l'église. Notre ferme se trouve au milieu des champs, deux fois plus éloignée de l'église que de la mairie. À quelle distance est-elle de l'école ?

Ce problème posé dans le numéro 62 de Corol'aire a suscité de nombreuses réponses.

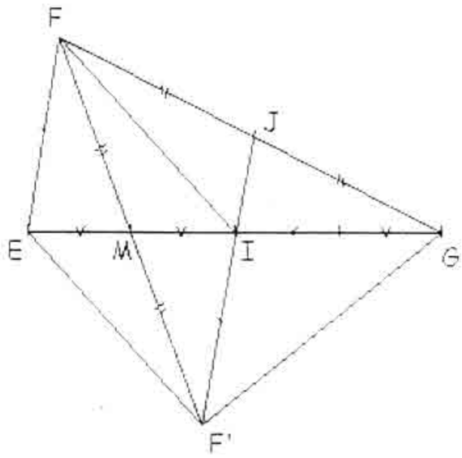


Solution 1

Cette première solution de Bruno Alaplantive de Pamiers n'utilise que des outils du collège.

Considérons le point F' symétrique de F par rapport à M. EFIF' est un parallélogramme. Donc FE = F'I.

Soit J le milieu de [FG]. Le triangle F'FG est isocèle de sommet F. [GM] et [F'J] en sont deux médianes issues des sommets de la base et donc I qui est situé sur [MG] aux deux tiers à partir de G est aussi sur la médiane [F'J] aux deux tiers à partir de F'. Comme le triangle est isocèle, ces deux médianes ont même longueur. Donc FE = F'I = GI = 200 m et ceci quelle que soit la position de F. Le point F est donc sur un cercle de centre E et de rayon 200 m.



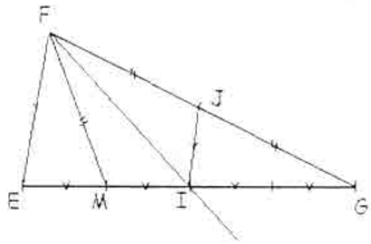
Maryvonne Le Berre de Lyon utilise aussi le triangle isocèle F'FG dont I est le centre de gravité, déduit l'égalité IJ = IM et conclut avec l'énoncé des milieux dans le triangle EFG.

Solution 2

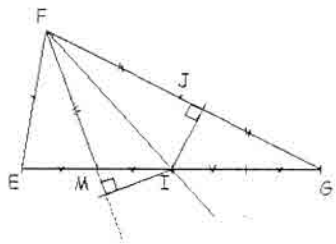
Cette deuxième solution de Gérard Guillet, de Niort, dépasse en partie le niveau collège.

Dans le triangle EFG, I et J étant les milieux respectifs de [EG] et [FG], on a FE = 2IJ.

Dans le triangle FMG, la bissectrice de l'angle MFG partage le côté MG dans le rapport des longueurs des côtés FM et FG. Or ce rapport est égal à 1/2 ; donc la bissectrice coupe le côté [MG] en I. (FI) est axe de symétrie du triangle isocèle MFJ. Donc IJ = MI et donc FE = 200 m.



Remarque : le théorème utilisé concernant la bissectrice peut être contourné à l'aide d'une démonstration par les aires (Bruno Alaplantive). (dessin 3)



L'aire du triangle FMI est la moitié de celle du triangle IFE. Donc les hauteurs issues de I ont la même longueur et donc (FI) est la bissectrice de l'angle MFJ.

Bruno Alaplantive nous communique les trois autres solutions suivantes utilisant des outils de lycée.

Solution 3 (calcul vectoriel – barycentre)

M et G étant fixés, quel est le lieu de F tel que FG = 2 FM ?
Tout étant positif, on a $FG^2 - 4\ FM^2 = 0$.
On introduit le barycentre de (G,1) et (M, –4). On a :

$$0 = \left\|\overrightarrow{FG}\right\|^2 - 4\left\|\overrightarrow{FM}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EG}\right)^2 - 4\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EM}\right)^2$$

$$0 = FE^2 + 2\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{EG} + EG^2 - 4FE^2 - 8\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{EM} - 4EM^2$$

$$0 = -3FE^2 + EG^2 - 4EM^2 + 2\overrightarrow{FE}\left(\overrightarrow{EG} - 4\overrightarrow{EM}\right)$$

$$0 = -3FE^2 + (4EM)^2 - 4EM^2$$

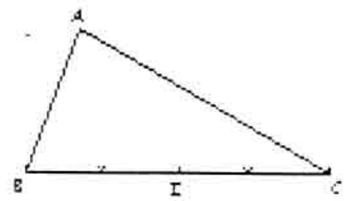
$$3FE^2 = 12EM^2$$

$$FE^2 = 4EM^2$$

$$FE = 2EM$$

Conclusion de l'auteur : « *C'est beau comme du calcul...* »

Solution 4 (calcul)



Cette solution repose sur le résultat suivant : $2AI^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{(2BC)^2}{2}$ appliqué aux triangles FEI et FEG.

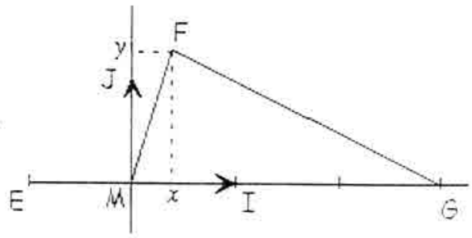
$$2FM^2 = FE^2 + FI^2 - \frac{(2EM)^2}{2} \text{ donc } 2x^2 = FE^2 + FI^2 - 2EM^2 \quad (1)$$

$$2FI^2 = FE^2 + FG^2 - \frac{(4EM)^2}{2} \text{ donc } FI^2 = \frac{1}{2}FE^2 + 2x^2 - 4EM^2 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \quad 2x^2 + FI^2 = \frac{3}{2}FE^2 + FI^2 + 2x^2 - 6EM^2$$

Après simplification, on obtient : $\frac{3}{2}FE^2 = 6EM^2$, *soit* $FE^2 = 4EM^2$ *et donc* $FE = 2$ *EM.*

Solution 4 (géométrie analytique) (Dessin 5)



Dans le plan repéré comme indiqué sur le dessin, si F (x, y) alors $\overrightarrow{FG}\,(3-x, -y)$.
FG = 2 FM. Donc $FG^2 = 4\ FM^2$. $(x-3)^2 + y^2 = 4(x+y)^2$.
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4x^2 - 4y^2 = 0$.
$-3x^2 - 6x + 9 - 3y^2 = 0$. En divisant par 3, on obtient :
$x^2 + 2x - 3 + y^2 = 0$; ou encore $(x+1)^2 - 1 - 3 + y^2 = 0$, et donc $(x+1)^2 + y^2 = 4$.
Le point F est donc sur le cercle de centre E $(-1, 0)$ et de rayon 2.

Maryvonne Le Berre a rapproché ce problème de cet autre :

Dans un triangle ABC tel que BC = 2AB, placer le point M sur le segment [AC] tel que MC = 2 AM.

Comparer les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{CBM}$.
Bonne recherche !

Troc de trucs

Dans le Corol'aire n°63, nous vous proposions d'échanger des trucs ou des illustrations qui permettent aux élèves de mémoriser ou de visualiser une formule, un résultat, une démarche.

Cette rubrique "Troc de trucs" permet à tous de les échanger. Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : chantal.gobin@wanadoo.fr

1. Pour retrouver des formules de trigonométrie :
SOHCAHTOA : Sinus Opposé Hypoténuse ; Cosinus Adjacent Hypoténuse ; Tangente Opposé Adjacent ; ou une version mnémotechnique : SOpHie CAcHe TOA !

2. Pour visualiser des coniques :
Projeter sur un mur le faisceau d'une lampe de poche. Suivant l'angle de projection, on obtient un cercle, une ellipse, une parabole, une hyperbole.

3. Pour aborder la notion de médiane, de quartiles, de déciles :
Utiliser un jeu de cartes et faire les différents partages.

4. Pour éviter les fautes d'orthographe quand on utilise le verbe résoudre :
Penser que résoudre ou coudre, ce n'est pas le même travail.
Or, on coud avec un Dé ! donc « je résous » et « je couds ».

Perles dans nos copies

Brevet

Un polygone est une figure qui a des côtés un peu partout.
L'ovale est un cercle presque rond, mais quand même pas.
Le losange est un carré tordu en biais.
Le zéro est très utile surtout si on le met derrière les autres nombres.

Bac

Un nombre réel est un nombre qu'on peut toucher du doigt.
La loi de probabilité s'appelle ainsi car on n'est pas sûr qu'elle existe.
L'ordinateur peut faire plus de calculs que le cerveau de l'homme car il n'a que ça à faire.

Nos collègues écrivent

Dans PLOT n°12 :
Jouons le jeu, par Frédéric de Ligt
Des pyramides aux racines carrées, par Jean Fromentin.

Dans le Bulletin Vert n° 462 :
Pour des fonctions qui fonctionnent, par Louis-Marie Bonneval

Dans Repères-IREM n° 63 :
Les transformations en géométrie, introduction à une approche historique, par Jean-Claude Thiénard.

Jean-Paul Guichard a collaboré à un ouvrage collectif " **François Viète** " (éditions Vuibert), que vous pouvez commander à la régionale au prix adhérent de 28,50 euros (+ port éventuel).

Dominique Souder collabore régulièrement à ***Tangente***.

Association
des **P**rofesseurs
de **M**athématiques
de l'**E**nseignement
Public

La Régionale A.P.M.E.P.
de Poitou-Charentes
vous invite à participer
à la conférence

Ahmed DJEBBAR

Professeur d'Histoire des mathématiques
à l'Université des Sciences et des Technologies de Lille.

Les sciences arabes entre l'héritage gréco-indien et la réception européenne (IXe-XVe siècles)

Dans une première partie, seront présentés les facteurs qui ont pu favoriser la naissance d,une nouvelle tradition scientifique et philosophique en Méditerranée orientale puis les éléments essentiels concernant les sources anciennes (mésopotamienne, persane, indienne et surtout grecque) qui ont permis cette naissance, ainsi que les voies par lesquelles les premiers hommes de science des pays d'Islam ont pu accéder à ces sources.
Dans une seconde partie, seront exposées les grandes phases du développement des sciences arabes et de la philosophie et seront évoqués, à l'aide de documents d'époque, les domaines dans lesquels les scientifiques de cette civilisation ont apporté des contributions significatives.
Dans une troisième et dernière partie, sera évoqué le phénomène de la circulation partielle autour de la Méditerranée, à partir d'une époque déterminée, des corpus scientifiques et philosophiques grecs et arabes, ainsi que les conséquences de cette circulation sur la redynamisation des activités scientifiques et intellectuelles en général dans l'espace médiéval européen.

POUR AFFICHAGE

NIORT
le jeudi 13 avril
à 18 h 30
au lycée St André-Notre Dame
14 rue de Souché

A.P.M.E.P. , I.R.E.M. Faculté des Sciences, 40, Avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS Cedex.

Vie de l'IREM

Que devient l'IREM en cette année 2005-2006 ?

Recherche INRP :

Avec la commission Inter-IREM de didactique, et notamment des équipes de Montpellier, Grenoble, Bordeaux, Paris, Toulouse, Marseille et Clermont, nous nous sommes lancés dans un ambitieux projet de recherche, en lien avec l'INRP.
Ce projet fait suite à nos réflexions de l'an dernier sur le sens des mathématiques et à celles de la réunion de la commission didactique à La Grande Motte autour du thème : « Refonder l'enseignement des mathématiques dans le secondaire » ou « les mathématiques comme outils servant à résoudre des problèmes que se posent les hommes ».
Une des hypothèses de travail est la suivante : les mathématiques enseignées sont des mathématiques exclusivement scolaires qui se sont coupées des problèmes pour lesquels elles ont été créées et qui leur donnaient leur raison d'être enseignées.
Rechercher les raisons d'être et les questions génératrices de mathématiques font partie des objectifs de ce travail.
Ce travail qui alimente des réflexions profondes de la part de tous les formateurs IREM n'est pas que théorique. Des activités d'étude et de recherche organisées dans des parcours d'étude et de recherche seront expérimentées dans les classes.

Les thèmes retenus au lycée sont les suivants :

1. les constructions géométriques, en introduction à l'étude des triangles isométriques et semblables, et à l'algèbre,
2. les fonctions
3. les statistiques.

Les thèmes retenus au collège :

1. autour du périmètre du cercle en 6^e,
2. autour du calcul littéral en 3^e.

Rédaction d'une nouvelle Brochure :

D'autre part, nous avons repris la rédaction d'une brochure « Enseigner les mathématiques 3 », qui fera suite aux autres déjà publiées sous le même titre. Rappelons que l'objectif de ces brochures est de montrer que l'enseignement des mathématiques nécessite des connaissances mathématiques, historiques, pédagogiques et didactiques.
Les thèmes abordés en seront :

En histoire des maths :
Les transformations.
D'où vient la notion de transformation ponctuelle ? Cet article en retrace l'histoire : transformations projectives créées par Desargues (XVIIe) en passant par les homologies, transformations par polaires réciproques inventées par Poncelet, Chasles, Monge au XIXe siècle pour terminer avec les transformations géométriques enseignées qui sont aussi historiquement les plus récentes.

En pédagogie :
Les diaporamas : gadget ou outil incontournable ?
Il s'agit de présenter les avantages et les inconvénients de l'usage pédagogique des diaporamas. Des exemples qui illustreront l'article seront en lien sur le site de l'IREM.
Les devoirs en classe : pratique dépassée ou pratique plus que jamais utile ?
Comment concevoir, corriger, utiliser en classe les devoirs à la maison, articuler les devoirs en classe et les devoirs maison sont les questions auxquelles nous apporteront des éléments de réponses.

En mathématiques :
Des bonnes questions à propos d'exercices classiques.
Partant d'exercices classiques et routiniers sur les homographies complexes posés en terminale S, nous nous interrogeons sur les contenus mathématiques sous jacents mais aussi sur l'intérêt de tels exercices dans notre enseignement. Cela vaudra une excursion dans le monde des inversions mais aussi dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques.

En didactique :
La transposition didactique...
Comment s'opère le passage entre le savoir « savant » (celui des créateurs des notions) et le savoir à enseigner (celui qui figure dans les programmes). Comment s'opère le passage entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné (dans les classes) ? Deux questions dont se préoccupe la transposition didactique.

Nous espérons pouvoir sortir cette brochure cet été.

L'atelier de culture scientifique

Cet atelier, (voir Corol'aire 58 de septembre 2004), a reçu vendredi 10 février, Christian GUILPIN, physicien à Paris-Jussieu et auteur d'un manuel de calcul numérique appliqué. Nous l'avions invité pour nous éclairer sur les chiffres significatifs en physique, mais il nous a confirmé que c'est une question encore en débat et a préféré développer les méthodes utilisées pour gérer au mieux les problèmes dit de contingence, c.-à-d. de sensibilité aux variations des données (qu'elles soient liées aux incertitudes des mesures ou aux arrondis pratiqués dans les calculs).

Repères IREM :

Enfin signalons qu'un article consacré à l'histoire des transformations géométriques paraîtra dans Repères IREM n°63, un autre issu du travail de l'équipe lycée sur la radioactivité paraîtra dans le numéro 64 de cette même revue.
C'est l'occasion de vous inciter à vous abonner ou au moins à faire abonner votre CDI à cette excellente revue, reflet des travaux des IREM.
Sur le site
http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/reperes.htm
vous trouverez les sommaires des numéros déjà parus, les résumés des différents articles (certains sont même directement en ligne) et, bien entendu, toutes références pour l'abonnement

RU - BRI - COL LAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Pour entamer ce premier bulletin de l'année 2006 dans la bonne humeur :

« Quand je suis arrivé à l'école, ce matin, les copains parlaient du problème d'arithmétique.
- Moi, comme réponse, ça me donne 3 508 œufs, a dit Geoffroy. Eudes, ça l'a fait drôlement rigoler, ça.
- Hé, les gars ! il a crié. A Geoffroy, ça lui fait 3 508 œufs !
- À moi aussi, a dit Agnan, qui est le premier de la classe et le chouchou de la maîtresse.
Alors, Eudes s'est arrêté de rigoler et il est parti au fond de la cour pour faire des corrections sur son cahier.
Joachim et Maixent avaient le même résultat : 3,76 œufs. Quand il y a des devoirs difficiles, Joachim et Maixent se téléphonent et la maîtresse leur met souvent un zéro à chacun. Mais cette fois-ci, ils nous ont dit qu'ils étaient tranquilles, parce que c'étaient leurs pères qui s'étaient téléphoné.
- Et toi, tu as combien ? m'a demandé Alceste.
- Moi, je n'ai rien du tout, j'ai dit. Moi, j'ai une excuse.
Et j'ai montré la carte de visite de papa aux copains. »
Goscinny et Sempé, *Histoires inédites du petit Nicolas*, IMAV éditions, 2004.

Poursuivons avec les belles lectures de Léa Broutille :

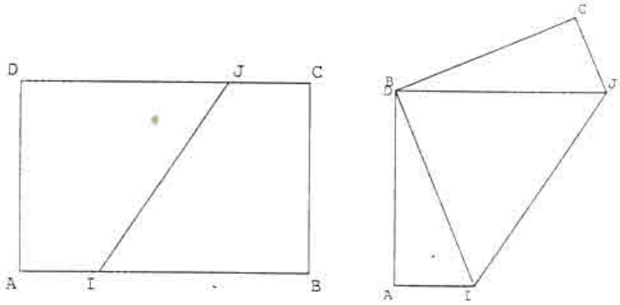
On peut définir au compas
De tout ce qu'on voit ici bas
La forme en rond unie :
Mais on ne saurait mesurer
Le mal, que me fait endurer
Mon amour infinie.
Au centre, autour duquel se fait
Du monde le cercle parfait
Toutes les lignes se tendent :
Et le divin de vos beautés
Est le point où mes volontés
Egalement se rendent
...

- Chansons - Joachim de Bellay (1549)

Des problèmes

64-1 *Ex.23, p.79, Magnard 4e (avril 2002)* :
Deux droites sécantes et un point extérieur à ces deux droites sont donnés. Construire un cercle tangent aux deux droites et passant par le point M. Une méthode niveau 4ème ?

64-2 *de Chantal Gobin (Loudun)* :
L'énoncé suivant a été proposé au Rallye du Centre :
Montrer que, quelque soit le rectangle, le rapport (longueur du pli) / (longueur de la diagonale) est égal au rapport (largeur du rectangle) / (longueur du rectangle).



64-3 *de Thierry Sageaux (Bordeaux)* :

Trouver tous les couples d'entiers (a, b) non triviaux vérifiant $a^{b^2} = b^a$.

Des solutions

61-5 *(Marc Blanchard)* :
Montrer que pour tout entier $m > 0$, il existe une infinité de termes de la suite de Fibonacci qui sont divisibles par m. On rappelle que les nombres de Fibonacci sont définis par : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$; $F_0 = F_1 = 1$.

Solution de Jean-Christophe Laugier :

Considérons la suite de Fibonacci *modulo m*, c'est-à-dire la suite (f_n) définie par : $f_n := F_n \bmod m$ (reste de la division euclidienne de F_n par m).

Cette suite prend ses valeurs dans $\{0, 1, ..., m-1\}$. La suite infinie des couples (f_n, f_{n+1}), avec $n \geq 0$, prend donc au plus m^2 valeurs distinctes. Il en résulte qu'il existe $n_0 \geq 0$ et $p > 0$ tels que $f_{n_0} = f_{n_0+p}$ et $f_{n_0+1} = f_{n_0+1+p}$: on peut supposer les deux égalités précédentes satisfaites avec n_0 *minimal*, auquel cas $n_0 = 0$. En effet, si $n_0 > 0$, il vient :

$$f_{n_0-1} = f_{n_0+1} - f_{n_0} = f_{n_0+1+p} - f_{n_0+p} = f_{n_0-1+p},$$

et ceci est en contradiction avec la minimalité de n_0.

On a donc $f_p = f_0 = 1$, $f_{p+1} = f_1 = 1$ et par conséquent $f_n = f_{n+p}$ pour tout $n \geq 0$, comme on le montre aisément par récurrence sur n. La suite (f_n) est donc périodique de période p. Puisque $f_p = f_{p+1} = 1$, alors $f_{p-1} = 0$ d'où $f_{p-1+kp} = 0$ pour tout $k \geq 0$. F_n est donc divisible par m pour une infinité de valeurs de n.

62-3 *(concours général 2005)* :

Soit f une fonction de $[0 ; 1]$ vers **R**, continue sur $[0 ; 1]$, telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que pour tout x de $[0 ; 7/10]$ $f(x + 3/10) \neq f(x)$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions dans $[0 ; 1]$.

Solution de Jean-Christophe Laugier :

À la lecture de l'énoncé, on devine que le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas loin ! La fonction $x \mapsto f(x + 3/10) - f(x)$ est continue et ne s'annule pas sur $[0 ; 7/10]$ par hypothèse. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle garde donc un signe constant sur $[0 ; 7/10]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(x + 3/10) > f(x)$ pour tout $x \in [0 ; 7/10]$. Il vient :

$$f(0) = 0 < f(3/10) < f(6/10) < f(9/10) \text{ et } f(1) = 0 > f(7/10) > f(4/10) > f(1/10).$$

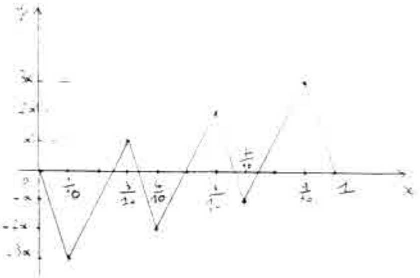
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc sur chacun des intervalles $]1/10 ; 3/10[$, $]3/10 ; 4/10[$, $]4/10 ; 6/10[$, $]6/10 ; 7/10[$, $]7/10 ; 9/10[$. Puisque $f(0) = f(1) = 0$, f s'annule bien au moins sept fois sur $[0 ; 1]$.

Peut-on à present donner un exemple simple de fonction f vérifiant les hypothèses de l'énoncé ?

Pour que $f(x + 3/10) \neq f(x)$ pour tout $x \in [0 ; 7/10]$, il suffit que : $f(x + 3/10) - f(x) = \alpha$ (α nombre positif donné) soit :

$$f(x + 3/10) = f(x) + \alpha \quad \text{pour tout } x \in [0 ; 7/10] \quad (1)$$

Une fonction f vérifiant (1) est déterminée sur $[0 ; 1]$ dès qu'on la connait sur $[0 ; 3/10]$. On devra avoir d'autre part $f(3/10) = \alpha$ car $f(0) = 0$ et $f(1/10) = f(1 - 3 \times 3/10) = -3\alpha$ car $f(1) = 0$. On a donc finalement à se donner une fonction f continue sur $[0 ; 3/10]$ telle que $f(0) = 0$, $f(1/10) = -3\alpha$, $f(3/10) = \alpha$ que l'on prolonge à $[0 ; 1]$ au moyen de (1). Voici un exemple d'une telle fonction :



62-5 *(magazine logimath)* :

À un congrès il y a 2005 participants. Chacun est repéré par son numéro d'inscription. Le congressiste n°1 a donné une poignée de mains, le congressiste n°2 a donné 2 poignées de mains, le congressiste n°3 a donné 3 poignées de mains, etc. Jusqu'au congressiste n°2004 qui a donné 2004 poignées de mains.

Combien de poignées de mains a données le 2005$^{\text{ème}}$ congressiste ?

Solution de Jean-Christophe Laugier :

Considérons le graphe simple G ayant pour sommets les 2005 personnes et pour arêtes les paires $\{i, j\}$ telles que i et j se soient serré la main. On sait donc que le degré du sommet i est i pour tout i = 1, 2, ..., 2004 et il s'agit de déterminer le degré du sommet 2005. L'énoncé affirme implicitement l'existence d'un tel graphe. Nous allons nous en assurer en démontrant le résultat suivant :

Pour tout ensemble fini $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $(n \geq 2)$, il existe un graphe simple unique G admettant pour ensemble de sommets X et tel que pour tout i = 1, 2, ..., n - 1, x_i ait pour degré i. Si l'on pose d_n = degré de x_n dans G, on a alors la relation : $d_n = d_{n-2} + 1$ pour $(n \geq 4)$.

Démonstration par récurrence sur n.

Le résultat est vrai pour n = 2. Dans ce cas, G admet comme seule arête $\{x_1, x_2\}$ et $d_2 = 1$.

Le résultat est vrai pour n = 3. Dans ce cas, les arêtes de G sont $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$ et $d_3 = 1$.

Supposons le résultat établi pour tous les entiers inférieurs à n $(n \geq 4)$.

Soit donc $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et G = (X, A) un graphe d'ensemble de sommets X et d'ensemble d'arêtes A. Alors G vérifie la condition : pour tout i = 1,2,..., n - 1, x_i a pour degré i si et seulement si A contient les arêtes $\{x_i, x_{n-1}\}$ (i = 1, 2, ..., n -2, n)

(condition équivalente à degré de x_{n-1} = n - 1) et le sous-graphe G' d'ordre n - 2 de G ayant pour ensemble de sommets $X' = X \setminus \{x_1, x_{n-1}\} = \{x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n\}$ et pour ensemble d'arêtes $A' = A \setminus \{\{x_i, x_{n-1}\} / i = 1, 2, \ldots, n-2, n\}$ vérifie la condition : pour tout i = 2, ... n -2, x_i a pour degré i - 1.
D'après l'hypothèse de récurrence, A' existe et est unique et cela prouve l'existence et l'unicité de A puisque $A = A' \cup \{\{x_i, x_{n-1}\} / i = 1, 2, \ldots, n-2, n\}$.
D'autre part, on voit que le degré de x_n dans G est égal au degré de x_n dans G' augmenté de 1 d'où $d_n = d_{n-2} + 1$.
Il résulte de la relation $d_n = d_{n-2} + 1$ et de $d_2 = d_3 = 1$ que : $d_{2p} = d_{2p+1} = p$ pour tout $p \geq 1$.
Nous pouvons à présent revenir à notre congrès ! Puisque $d_{2005} = 1002$, le 2005[e] congressiste a donné 1002 poignées de main.

62-6 *(Jean-Christophe Laugier)* :
Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des entiers naturels k et l tels que $n = E(k\sqrt{2} + l\sqrt{3})$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
Voici les deux solutions reçues. L'une assure l'existence de tels couples alors que l'autre exhibe deux familles possibles.

Solution de Raymond Barra :

Je note E l'ensemble des nombres $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ avec (a, b) dans $\mathbf{N}^2$, et je choisis un entier $n \geq 3$ (la fin dira pourquoi). J'introduis le sous-ensemble des nombres $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ avec $a \geq 2$ et qui sont strictement inférieurs à n (strictement est de trop car les nombres de E ne sont pas entiers sinon $\sqrt{6}$ serait rationnel). Ce sous-ensemble n'est pas vide, il contient $2\sqrt{2}$, et est fini (les nombres $a\sqrt{2}$ inférieurs à n sont en nombre fini et donc aussi les nombres $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$), il a donc un plus grand élément que je note A, $A < n$, et que j'écris $u\sqrt{2} + v\sqrt{3}$. Je note B le nombre $(u + 1)\sqrt{2} + v\sqrt{3}$. Par définition de A, $B - A = \sqrt{2}$ et $B \geq n$.
Si $B < n + 1$, alors n est la partie entière de B.
Si $B \geq n + 1$, alors $B - A \geq n + 1 - A$; $\sqrt{2} \geq n + 1 - A$ donc $n + 1 - \sqrt{2} \leq A < n$.
Par conséquent $n + 1 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \leq A - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < n - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. Or $0 < 1 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 1/4$ et $0 < -2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 1$.
Donc $A - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ qui est égal à $(u - 2)\sqrt{2} + (v + 2)\sqrt{3}$ est dans $[n ; n + 1[$.
Et ce nombre est dans E puisque $u - 2 \in \mathbf{N}$ et $v + 2 \in \mathbf{N}$. Lorsque $n = 1$, n est $E(\sqrt{2})$; et $n = 2$ est la partie entière de $2\sqrt{2}$.

Solution de Serge Parpay :

On a $0 = E(0\sqrt{2} + 0\sqrt{3})$, $1 = E(1\sqrt{2} + 0\sqrt{3}) = E(0\sqrt{2} + 1\sqrt{3})$, $2 = E(2\sqrt{2} + 0\sqrt{3})$. On supposera dans la suite que $n \geq 3$.
Tout nombre n est compris dans un intervalle $I = [a\sqrt{2}, (a + 1)\sqrt{2}]$ avec $a = E(n/\sqrt{2})$. Comme $n \geq 3$ alors $a \geq 2$. Reportons cet intervalle sur l'axe des réels avec A $(a\sqrt{2})$, A'$((a + 1)\sqrt{2})$. L'amplitude de I est AA' c'est-à-dire $\sqrt{2}$, il existe donc un ou deux entiers entre A et A'. Soit C le point d'abscisse $(a - 2)\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$, on a $AC = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < 1$ et $CA' = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} < 1$. L'entier n est dans l'intervalle [AC] ou [CA']. Le deuxième entier possible étant alors dans l'autre intervalle.
Donc $n = E((a + 1)\sqrt{2} + 0\sqrt{3})$ ou $n = E((a - 2)\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$. On peut définir un couple (k, l), $(k, l) = (a + 1, 0)$ ou $(k, l) = (a - 2, 2)$ suivant les cas. On peut trouver d'autres couples. Selon la même méthode, on utilise l'intervalle $J = [b\sqrt{3}, (b + 1)\sqrt{3}]$ avec $b = E(n/\sqrt{3})$. On choisit alors pour abscisse de C : $(b - 2)\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$. Ce choix impose $b \geq 2$, donc $n > 2\sqrt{3}$, d'où $n \geq 4$.
On peut obtenir 3 directement $3 = E(0\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) = E(1\sqrt{2} + 1\sqrt{3})$. Les deux méthodes précédentes « se complètent ». Le tableau ci-dessous « montre » qu'il y a plusieurs couples (k, l) tels que $n = E(k\sqrt{2} + l\sqrt{3})$ pour toute valeur de n sauf $n = 0$ et $n = 2$. On peut analyser ce tableau et raisonner à partir de la variation « conjointe » de k et l pour une même valeur de n ($\sqrt{3} - \sqrt{2}$ étant le lien entre deux cases successives).

$k \setminus l$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	4	5	7	8	9
1	1	3	4	5	7	8	10	11
2	3	4	6	7	9	10	11	13
3	5	6	8	9	11	12	13	15
4	6	8	9	11	12	14	15	16
5	8	10	11	12	14	15	17	18
6	10	11	13	14	16	17	18	20
7	12	13	14	16	17	19	20	21

Exemples pour les 2 méthodes : $5\sqrt{2} < 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 8 < 6\sqrt{2}$; $6\sqrt{2} < 9 < 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} < 10 < 7\sqrt{2}$; $7\sqrt{3} < 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2} < 13 < 8\sqrt{3}$; $8\sqrt{3} < 14 < 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2} < 15 < 9\sqrt{3}$.

Rectificatif au Corol'aire n°63.
Dans la solution au problème 62-2 donnée par Jacques Chayé, il faut rétablir les barres des mesures algébriques au 2) :
L'énoncé de Thalès permet d'écrire : $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$ et aussi $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OC'}}$ d'où, en multipliant membre à membre $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}$.
Grâce à la réciproque de l'énoncé de Thalès, on en déduit le parallélisme de (BB') et (CC').
N.d.l.r. : Nous vous prions de nous excuser pour cette coquille qui est de notre fait.