RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

C'est aussi la rentrée pour vos Rubricol'ages. Le courrier reçu pendant les vacances a été abondant. En voici seulement une partie.

Des problèmes

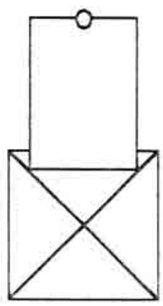
63-1. *Un prolongement de l'exercice 56-4 proposé par Jacques Chayé (Poitiers) :*
Un point A est fixé à l'intérieur d'un cercle. Deux droites perpendiculaires pivotent autour de A : la première coupe le cercle en M et M', la seconde en N et N'. La tangente en M et la tangente en M' se coupent en T_1. La tangente en N et la tangente en N' se coupent en T_2. La tangente en M et la tangente en N se coupent en U_1. La tangente en M' et la tangente en N' se coupent en U_2. La tangente en M et la tangente en N' se coupent en U_3. La tangente en M' et la tangente en N se coupent en U_4. Quels sont les ensembles de points décrits par les points T_1, T_2, U_1, U_2, U_3, U_4 ?

63-2 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort) :*
Lors d'un congrès international on a observé les faits suivants :

- Il y a au moins neuf participants.
- Chacun d'eux parle au plus trois langues.
- Parmi trois participants quelconques, il y en a toujours au moins deux parlant la même langue.

Montrer que l'on peut trouver trois participants parlant la même langue.

63-3 *de Nathalie Chevalarias (Saint-Georges Les Baillargeaux) :*
Lors du séminaire de rentrée de l'IREM de Poitiers, le 16 septembre dernier, Nathalie Chevalarias nous a présenté un outil de menuisier servant à dessiner des ellipses. Cet outil est constitué de deux pièces en bois : l'une de forme carrée dans laquelle l'artisan a pratiqué deux rainures selon les diagonales ; l'autre de forme rectangulaire dont les deux sommets d'une largeur vont pouvoir coulisser dans les rainures . Un crayon est fixé au milieu de l'autre largeur.
Vous devez savoir aussi que la largeur de la pièce rectangulaire vaut exactement la moitié de la diagonale du carré.
Pourriez-vous montrer simplement que le crayon a effectivement dessiné une ellipse quand la planche rectangulaire a effectué un mouvement complet ?



Des solutions

59-3 *(de Daniel Daviaud) :* Vous participez à un jeu où l'on vous propose trois coffres fermés au choix. L'un des coffres est rempli d'or et les deux autres sont vides. Vous choisissez, disons, le coffre 1 : l'animateur, qui sait où se trouve l'or, ouvre un autre coffre, vide bien sûr. Il vous donne maintenant la possibilité de vous en tenir à votre choix initial (coffre 1) ou de choisir l'autre coffre. Qu'avez-vous intérêt à faire ?
Daniel Daviaud aurait-il eu un pressentiment ? En tous les cas son problème a été traité par Boris Véron dans le dernier Bulletin Vert *(n°460, p.605) dans l'article « Trois portes et le gros lot » ainsi que par J.P Delahaye qui en a fait le sujet de sa chronique dans la revue* Pour la Science *d'octobre 2005. Je vous renvoie à ces deux références pour de plus amples informations.*

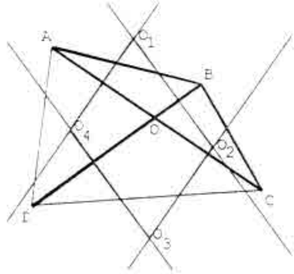
61-3 *(de Jean-Christophe Laugier) :*
Montrer que dans une assemblée d'au moins six personnes il est toujours possible de trouver trois personnes se connaissant mutuellement ou trois personnes mutuellement étrangères.
Solution de Louis Rivoallan :
D'abord, il faut un certain temps pour comprendre l'énoncé. D'ailleurs, pour ma part je l'ai reformulé d'une façon plus géométrique.
Soit six points distincts A, B, C, D, E et F représentant les personnes. Si elles se connaissent, on les relie par un trait plein, si elles ne se connaissent pas, on les relie par un trait en pointillés. Pour simplifier la rédaction, on dira qu'un triangle est homogène si ses trois côtés sont des traits de même nature. Il s'agit de montrer que dans un hexagone dont on a tracé les côtés et les diagonales, il y a nécessairement au moins un triangle homogène.
<u>Lemme</u> : Soit un quadrilatère dont on a tracé les côtés et les diagonales. Si d'un point partent trois traits de même nature, alors il y a au moins un triangle homogène.
<u>Preuve</u> : Supposons que les segments [AB], [AC] et [AD] soient des traits pleins. Si un des segments [BC], [CD] ou [DB] est plein, alors un des triangles est homogène, sinon aucun d'eux n'est plein, mais alors ils sont tous les trois en pointillés, et le triangle BCD est homogène.

Revenons à l'hexagone.
Si on trace les côtés et les diagonales de l'hexagone ABCDEF, alors de chaque sommet partent 5 traits : d'après le principe des tiroirs, il y en a au moins trois qui seront de même nature, et d'après le lemme précédent, il y a alors au moins un triangle homogène.

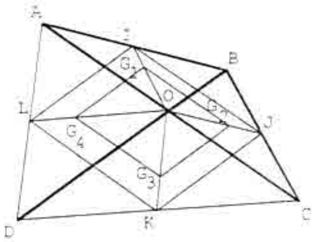
59-4 *(de Louis Rivoallan)* : Le dessin d'un quadrilatère convexe et de ses deux diagonales fait apparaître quatre triangles. Les centres de gravité, les centres des cercles circonscrits ou les orthocentres de ces triangles sont à chaque fois les sommets d'un parallélogramme.

Solution de Frédéric de Ligt :

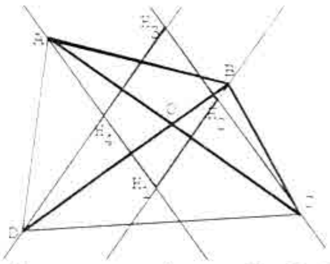
Cette question est tout à fait abordable en classe de troisième. Aussi les preuves données n'utilisent-elles que des outils disponibles à ce niveau. La propriété reste vraie pour un quadrilatère quelconque à condition que les droites contenant les diagonales soient sécantes.



On note respectivement O_1, O_2, O_3 et O_4 les centres des cercles circonscrits aux triangles OAB, OBC, OCD et ODA.
On a : méd[OB] = (O_1O_2) et méd[OD] = (O_3O_4) : comme par ailleurs méd[OB] et méd[OD] sont parallèles alors il en est de même pour (O_1O_2) et (O_3O_4). On montre de même que (O_1O_4) est parallèle à (O_2O_3). Le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ est bien un parallélogramme.



On note respectivement I, J, K et L les milieux de [AB], [BC], [CD] et [DA] : G_1, G_2, G_3 et G_4 respectivement les centres de gravité des triangles AOB, BOC, COD et DOA. Si l'on sait que le centre de gravité d'un triangle est placé au deux tiers de chaque médiane à partir du sommet, on peut écrire :
$OG_1/OI = OG_2/OJ = OG_3/OK = OG_4/OL = 2/3$. D'après la réciproque de la propriété de Thalès dans les triangles OIJ, OJK, OKL et OLI on a :
$(G_1G_2) // (IJ)$, $(G_2G_3) // (JK)$, $(G_3G_4) // (LK)$ et $(G_4G_1) // (LI)$. On sait que IJKL est le parallélogramme de Varignon du quadrilatère ABCD : le quadrilatère $G_1G_2G_3G_4$ a donc ses côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme.



On note respectivement H_1, H_2, H_3 et H_4 les orthocentres de triangles AOB, BOC, COD et DOA. La droite (H_1H_2) est une hauteur commune aux triangles AOB et BOC, de même (H_3H_4) est une hauteur commune aux triangles COD et DOA. Comme ces deux droites sont toutes deux perpendiculaires à la diagonale [AC], on en déduit que (H_1H_2) et (H_3H_4) sont parallèles. On raisonne identiquement selon la diagonale [BD] pour établir que (H_2H_3) est parallèle à (H_1H_4). Le quadrilatère $H_1H_2H_3H_4$ est donc un parallélogramme.

62-2 *(de Jame Ferla-Sieste)* :

Soit deux droites (Δ) et (Δ'). A, B et C trois points de (Δ). A', B' et C' trois points de (Δ') tels que (AB') // (CA') et (A'B) // (C'A). Les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

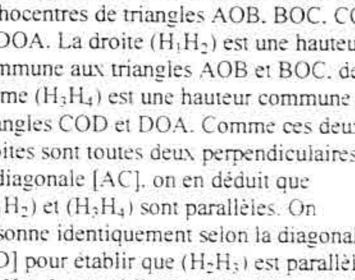
« Je ne veux pas me fatiguer à vous donner une démonstration de ce théorème aussi connu ».

Solution de Jacques Chayé : A CELUI QUI N'A PAPPUS SE DISPENSER DE SA SIESTE.

Je propose à ce paresseux trois démonstrations, ou plutôt, trois présentations de la même démonstration.

1) <u>Dans le cas où les droites Δ et Δ' sont parallèles</u> :

À l'aide d'outils élémentaires.



[AA'] et [B'C] ont même milieu I ; [AA'] et [BC'] ont même milieu I. Donc [B'C] et [BC'] ont même milieu. On en déduit le parallélisme de (BB') et (CC').

Vectoriellement.

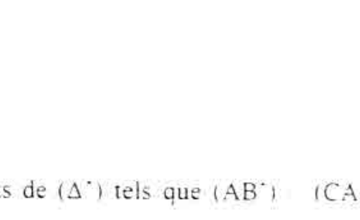
$\vec{BA} = \vec{A'C'}$ et $\vec{AC} = \vec{B'A'}$: donc $\vec{BA} + \vec{AC} = \vec{A'C'} + \vec{B'A'} = \vec{B'A'} + \vec{A'C'}$ et donc $\vec{BC} = \vec{B'C'}$. On en déduit le parallélisme de (BB') et (CC').

À l'aide des translations.

Soit t_1 la translation transformant B en A et A' en C', soit t_2 la translation transformant A en C et B' en A'. La translation $t_2 \circ t_1$ transforme B en C, la translation $t_1 \circ t_2$ transforme B' en C'. Or, $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$. Par conséquent, on passe de B à C et de B' à C' par la même translation. On en déduit le parallélisme de (BB') et (CC').

2) <u>Dans le cas où les droites Δ et Δ' sont sécantes en un point O</u> :

À l'aide d'outils élémentaires.



L'énoncé de Thalès permet d'écrire : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB'}{OA'}$ et aussi $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OA'}{OC'}$: d'où, en multipliant membre à membre, $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OB'}{OC'}$. Grâce à la réciproque de l'énoncé de Thalès, on en déduit le parallélisme de (BB') et (CC').

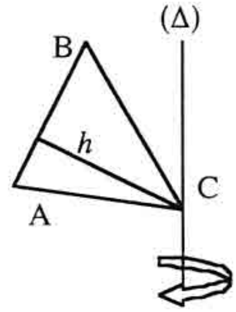
Vectoriellement.

Il existe un réel k_1 tel que $\overrightarrow{OA} = k_1\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC'} = k_1\overrightarrow{OA'}$ et un réel k_2 tel que $\overrightarrow{OC} = k_2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'} = k_2\overrightarrow{OB'}$. On a donc $\overrightarrow{OC} = k_2k_1\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC'} = k_2k_1\overrightarrow{OB'}$. On en déduit le parallélisme de (BB') et (CC').

A l'aide des homothéties.

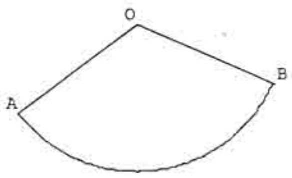
Soit h_1 l'homothétie transformant B en A et A' en C', soit h_2 l'homothétie transformant A en C et B' en A'. L'homothétie $h_2 \circ h_1$ transforme B en C, l'homothétie $h_1 \circ h_2$ transforme B' en C'. Or, $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$, puisque h_1 et h_2 sont de même centre. Par conséquent, on passe de B à C et de B' à C' par la même homothétie. On en déduit le parallélisme de (BB') et (CC').

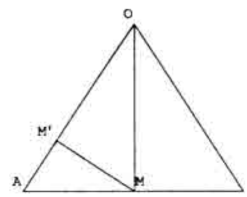
60-4 Le 8 décembre dernier au lycée J. Macé de Niort, **Serge Parpay** nous présentait des méthodes élémentaires de calcul d'aires et de volumes. Il a surpris l'assistance en exhibant la formule suivante : $V = Sh/3$ où V désigne le volume engendré par le triangle ABC ci-contre lors de sa rotation autour de l'axe (Δ), S l'aire alors engendrée par le côté [AB] et h la hauteur issue de C. Il a précisé qu'il fallait être « soigneux » pour l'établir. Etes-vous soigneux ?



Solution de Louis Rivoallan :

D'abord, revenir aux fondamentaux (comme disent les commentateurs sportifs) et établissons cette formule dans le cas du cône. Voici son patron d'une part et sa coupe d'autre part.



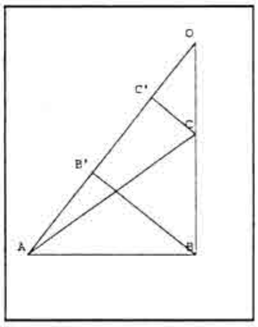


Le volume du cône de hauteur h et de rayon r est V = 1/3 π r^2 OM. L'aire latérale de ce cône est $\frac{1}{2}\alpha$ OA^2, α désignant l'angle $\widehat{AOB}$. Mais $\alpha = 2r\pi / OA$, donc l'aire latérale du cône est égale à $\pi \times OA \times r$.

De plus, aire OAM = 1/2 OM $\times$ r = 1/2 OA $\times$ MM', donc r $\times$ OM = OA $\times$ MM'.

Le volume du cône est donc V = 1/3 π r OA $\times$ MM' = 1/3 $\times$ MM' $\times$ aire latérale.

La formule annoncée par Serge PARPAY est donc exacte dans le cas du cône. Ce n'est pas étonnant quand on connaît la rigueur de Serge. Mais c'est quand même rassurant.



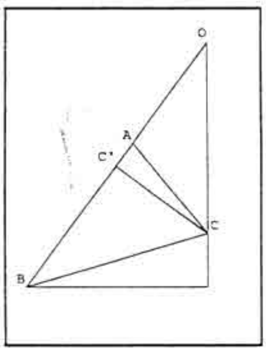
Continuons en découpant. Établissons la formule dans le cas du triangle OAC, tournant autour de (OC). Ce volume est égal à 1/3 $\pi \times AB^2 \times OB$ – 1/3 $\pi \times AB^2 \times CB$ = 1/3 π $AB^2 \times OC$.

(NDLR : Dans le cas où B est entre O et C il suffit de remplacer le moins par un plus).

Or, AB $\times$ OB = BB' $\times$ OA, d'où AB$\times$OC = $\frac{OC}{OB}\times$ BB' $\times$ OA = CC' $\times$ OA.

La formule du volume s'écrit donc : 1/3 π AB$\times$ CC'$\times$ OA = 1/3 $\times$ CC'$\times$ aire latérale.

La formule de Serge convient encore pour le triangle OAC.



Dans le cas général.

Volume engendré par (ABC) = Volume engendré par (OBC) – Volume engendré par (OAC).

Ce que l'on notera V(ABC) = V(OBC) – V(OAC).

Or V(OBC) = 1/3 $\times$ CC' $\times$ aire engendrée par OB et V(OAC) = 1/3 $\times$ CC' $\times$ aire engendrée par OA .

Donc, V(ABC) = 1/3 $\times$ CC' $\times$ (aire engendrée par (OB) - aire engendrée par (OA)).

Et on a : aire engendrée par (OB) - aire engendrée par (OA) = aire engendrée par (AB) (faire un dessin pour s'en convaincre !).

Donc V(ABC) = 1/3 $\times$ CC' $\times$ aire engendrée par (AB) .

Ce qui est bien la formule annoncée par Serge. Merci Serge pour ce joli problème.

*La rubrique « **Défi Collège** » sera présente dans le prochain numéro de Corol'aire. N'hésitez pas à nous envoyer des problèmes qui peuvent être résolus avec les outils du niveau Collège.*