

C'est aussi la rentrée pour vos Rubricol'ages. Le courrier reçu pendant les vacances a été abondant. En voici seulement une partie.

Des problèmes

62-1 Le Bijou de Belinda Fram-Heto

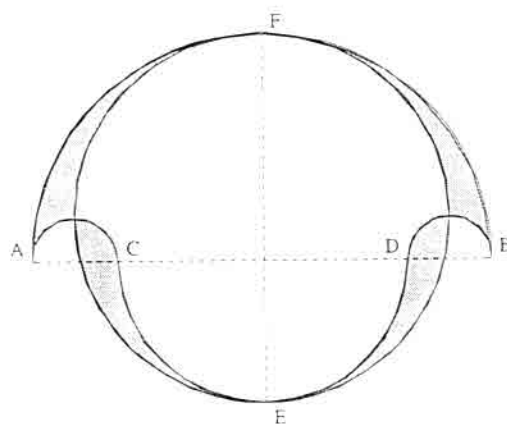
L'exercice 5 du rallye de cette année portait sur le salinon.

Le partage du diamètre [AB] en six parties égales avait été choisi pour que les élèves puissent faire facilement les calculs.

Mais le problème est plus général. Données :

- Demi-cercle de diamètre AB = 2R ;
- Deux demi-cercles de diamètres AC et DB, (AC = DB = 2r) ;
- Le demi-cercle de diamètre CD ;
- Le cercle de diamètre EF.

Montrer que les quatre parties grisées ont la même aire. Trouver cette aire en fonction de R et de r.



Prof. Ila Ransor

62-2 Au temps de Pappus (fin du 3^{ème} siècle) : un théorème

Soit deux droites (Δ) et (Δ'). A, B et C trois points de (Δ). A', B' et C' trois points de (Δ') tels que (AB') // (CA') et (A'B) // (C'A). Les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

« Je ne veux pas me fatiguer à vous donner une démonstration de ce théorème aussi connu »

Jame Ferla-Sieste

Glané par Léa brouille

- « Défiiez-vous des ensorcellements et des attraits diaboliques de la géométrie » Fénelon (André Delachet – La géométrie contemporaine – Que sais-je n° 401)
- « Le cercle baisant », pour plus de renseignements : le livre très intéressant de R. Lutz, A. Makhoul et E. Meyer « Fondements pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordre de grandeur : les réels dévoilés » (Publication de l'APMEP n° 103).

Louis-Marie Bonneval m'a aimablement communiqué les trois problèmes suivants :

62-3 concours général 2005 :

Soit f une fonction de $[0 : 1]$ vers $\mathbb{R}$, continue sur $[0 : 1]$, telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que pour tout x de $[0 : 7/10]$ $f(x + 3/10) = f(x)$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions dans $[0 : 1]$.

62-4 cité par Dominique Roux dans sa conférence à l'IREM le 3 juin 2005 :

Soit ABC un triangle tel que AB = AC et $\hat{BAC} = 20^\circ$. On construit D sur [AC] tel que $\hat{CBD} = 60^\circ$, et E sur [AB] tel que $\hat{BCE} = 50^\circ$. Calculer l'angle BDE.

62-5 magazine logimath :

À un congrès, il y a 2005 participants. Chacun est repéré par son numéro d'inscription. Le congressiste n°1 a donné une poignée de mains, le congressiste n°2 a donné 2 poignées de mains, le congressiste n°3 a donné 3 poignées de mains, etc. Jusqu'au congressiste n°2004 qui a donné 2004 poignées de mains. Combien de poignées de mains a données le 2005^e congressiste ?

Et enfin un problème d'approximation.

62-6 de Jean-Christophe Laugier (Rocheport) :

Montrer que pour tout entier naturel n , il existe des entiers naturels k et l tels que $n = [k\sqrt{2} + l/3]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x .

Des solutions

Claude Morin de Limoges revient sur trois problèmes déjà résolus dans des rubriques antérieures. Voici ses très élégantes solutions :

52-2 (de Serge Parpay) :

Soit un quadrilatère convexe ABCD dont les diagonales se coupent en O. K est l'orthocentre du triangle ADO, H est l'orthocentre du triangle CBO, I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. Montrer que les segments [HK] et [IJ] sont orthogonaux.

Solution de Claude Morin :

- 1) $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CJ}$ donc $2\vec{IJ} = \vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD}$.
- 2) $\vec{HK} \cdot \vec{AC} = (\vec{HB} + \vec{BD} + \vec{DK}) \cdot \vec{AC} = \vec{BD} \cdot \vec{AC}$ car $\vec{HB} \perp \vec{AC}$ et $\vec{DK} \perp \vec{AC}$.
- 3) $\vec{HK} \cdot \vec{BD} = (\vec{HC} + \vec{CA} + \vec{AK}) \cdot \vec{BD} = \vec{CA} \cdot \vec{BD}$ car $\vec{HC} \perp \vec{BD}$ et $\vec{AK} \perp \vec{BD}$.
- 4) On en déduit $\vec{HK} \cdot 2\vec{IJ} = \vec{BD} \cdot \vec{AC} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = 0$. Donc $\vec{HK} \perp \vec{IJ}$.

58-1 (de Jacques Drouglazet) :

On donne les suites numériques u, v, w définies par $u_0 = 1 ; v_0 = \sqrt{2} ; w_0 = 2 ; u_{n+1} = |v_n - u_n| ; v_{n+1} = |w_n - v_n| ; w_{n+1} = |u_n - w_n|$ pour tout entier naturel n . On considère alors l'ensemble $E_n = \{u_n ; v_n ; w_n\}$. Donner l'expression de l'ensemble E_n en fonction de n . Montrer que cet ensemble a pour limite l'ensemble $\{0 ; 0 ; 0\}$ quand n augmente indéfiniment. Reprendre l'exercice en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{3}$.

Solution de Claude Morin :

- 1) Notons $E_n = (a_n, b_n, c_n)$ avec $a_n \leq b_n \leq c_n$. Pour $n \geq 1$ on a $c_n = a_n + b_n$ et $0 \leq a_n$. On en déduit $c_{n-1} = b_n$, $a_{n-1} = \min(a_n, b_n - a_n)$, $b_{n-1} = \max(a_n, b_n - a_n)$. La suite (c_n) est décroissante minorée par 0 donc converge vers L ; par suite (b_n) converge aussi vers L et (a_n) vers 0. Si $L > 0$, on a pour $n \geq n_0$: $a_n = 0$, $b_n = c_n = L$. On peut alors remonter jusqu'à E_1 qui est de la forme $E_1 = (x, y, z)L$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$. Par suite si $E_0 = (1, \sqrt{2}, 2)$ on a nécessairement $L = 0$ (car $\sqrt{2}$ est irrationnel).
- 2) En fait on remarque que pour $E_0 = (1, \sqrt{2}, 2)$ on a $E_1 = (\sqrt{2} - 1)E_0$ donc $E_{2n+1} = (\sqrt{2} - 1)^n E_1$ et $E_{2n} = (\sqrt{2} - 1)^{n-1} E_2$; on retrouve bien $L = 0$. Si $E_0 = (1, \sqrt{3}, 2)$ on observe $E_1 = (2 - \sqrt{3})E_0$ d'où encore $L = 0$.
Si $E_0 = (1, \sqrt{5}, 2)$ on observe $E_1 = (\sqrt{5} - 2)E_0$, d'où encore $L = 0$.
- 3) On peut en fait généraliser à $\sqrt{d}$: si $E_0 = (1, \sqrt{d}, 1 + \sqrt{d})$ il existe des entiers T, a et b tels que $E_{n-T} = |a - b\sqrt{d}| E_n$.
Démonstration :
Partons de $E_0 = (1, x, 1+x)$ avec $x > 1$. On peut raisonner seulement avec le couple $(1, x)$. Si q_0 est la partie entière de x , on arrive en q_0 étapes à $(x - q_0, 1) = (x - q_0) \cdot (1, x_1) = \frac{1}{x_1} (1, x_1)$. Si on pose $x = q_0 + \frac{1}{x_1}$, il s'agit de la décomposition de x en fraction continue ; on arrive après $\sum_{k=0}^{n-1} q_k$ étapes à $E_n = \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} (1, x_n, 1+x_n)$. On retrouve que si x est rationnel la suite est stationnaire ($x_n = q_n$ pour un certain n) alors que si x est irrationnel, la suite $a_n = \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge vers a , d'où $a = 0$. Si $x = \sqrt{d}$, le développement est périodique :
 $\sqrt{d} = [q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n]$ avec $q_n = 2q_0$.
On peut alors montrer que $T = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ et que $x_1 x_2 \dots x_n = a - b\sqrt{d}$ où (a, b) est la solution fondamentale de l'équation de Pell-Fermat $[x^2 - dy^2] = 1$ et par suite $E_T = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} E_0$.

59-5 (de Louis Rivoallan) :

On considère les nombres à n chiffres (en base dix) tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. On accepte que contrairement à l'usage, les chiffres « de gauche » soient égaux à 0. Il y a à l'évidence deux nombres qui répondent à la question : 0 et 1, que l'on fait précéder de $(n - 1)$ zéros avec la convention précédente. Montrer, que pour tout n , il y a 2 autres nombres écrits avec n chiffres qui répondent à la condition.

Solution de Claude Morin :

On obtient par l'algorithme d'Euclide les deux solutions à n chiffres :

$X_n = 5^n x = 2^n y + 1$ et $X'_n = 2^n x' = 5^n y' + 1$ avec $0 < x < 2^n$ et $0 < x' < 5^n$. On en déduit :

- 1) $x' = 5^n - y$ et $y' = 2^n - x$, d'où $X_n + X'_n = 10^n + 1$, autrement dit, si $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont les suites des chiffres de X_n et X'_n (en commençant par le chiffre des unités) on a $a_1 = 5, b_1 = 6$ et pour $k \geq 2$: $a_k + b_k = 9$.
- 2) $X_{n+1} - X_n = 10^n k$ et $X'_{n+1} - X'_n = 10^n k'$.

- 1) Par un petit calcul, on a aussi X_{n-1} congru à X_n^2 modulo 10^{n-1} mais ce n'est pas valable pour X'_{n-1} .
 2) Remarque : le calcul de X_n par l'algorithme d'Euclide étendu est très rapide : avec une TI92 on obtient X_{200} en 15 secondes.

60-2 de Jean-Christophe Laugier (Rochefort) :

Quel est le plus petit carré dont l'écriture décimale commence par 2005 ?

Solution de Louis Rivoallan :

Il faut envisager 2 cas, suivant que le nombre a a un nombre de chiffres pair ou impair. Si le nombre a a un nombre de chiffres pair, alors il s'écrit $0,2005... \times 10^{2n} = a \times 10^{2n}$. Si le nombre de chiffres est impair, il s'écrit $2,005... \times 10^{2n} = a' \times 10^{2n}$. Dans chacun des cas, le nombre a ou a' étant un nombre décimal.

Cas numéro 1. On a $0,2005 < a < 0,2006$; la fonction racine carrée étant croissante, on a : $\sqrt{0,2005} < \sqrt{a} < \sqrt{0,2006}$ et par suite $0,447777... < \sqrt{a} < 0,447884$. Le nombre s'écrit donc 447..... On connaît les trois premiers chiffres de $\sqrt{a}$. Il suffit de tester la décimale suivante qui est un 7 ou un 8. On a de la chance car $4478^2 = 20052484$.

Cas numéro 2. On procède de la même manière : $\sqrt{2,005} = 1,41598...$ et $\sqrt{2,006} = 1,4163...$. Le nombre s'écrit 141... le premier chiffre manquant étant 5 ou 6. Or $1416^2 = 2005056$. Le plus petit nombre dont le carré commence par 2005 est donc 1416.

60-3

Lors des dernières journées nationales de l'APMEP à Orléans, **Francis Jamm** (lycée Lavoisier de Mulhouse) a animé un atelier consacré aux tas de sable. Il a versé du sable sur toutes sortes de surfaces planes découpées dans du carton et notamment sur des quadrilatères convexes. Un participant lui a demandé pour quels quadrilatères convexes on obtenait une pyramide. Sa réponse fut la suivante : « Une condition nécessaire et suffisante est que les bissectrices intérieures soient concourantes, c'est-à-dire que le quadrilatère admette un cercle inscrit ou encore que les sommes des côtés opposés soient égales ». **Francis Jamm** a pu justifier le lien entre l'obtention d'une pyramide et le concours des bissectrices en prenant un argument de projection mais il n'a pas eu le temps de nous prouver l'équivalence des trois dernières propositions. Sauriez-vous combler cette lacune ?

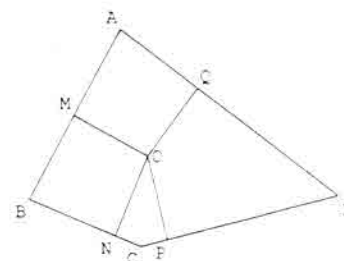
Solution de Louis Rivoallan

Il faut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Le quadrilatère ABCD a ses bissectrices intérieures concourantes.
- ii) Le quadrilatère ABCD admet un cercle inscrit.
- iii) Les sommes des longueurs des côtés opposés sont égales.

i) $\Rightarrow$ ii).

Soit O le point d'intersection des bissectrices intérieures. Soit M, N, P et Q les projetés orthogonaux de O sur (AB), (BC), (CD) et (DA). (AO) étant un axe de symétrie pour $\hat{A}$, on a OM = OQ. De façon analogue, on montre que OQ = OP et que OP = ON et enfin ON = OM. Par suite M, N, P, Q sont sur un même cercle de centre O. En utilisant l'orthogonalité de (OM) et de (AB), le cercle précédent admet (AB) comme tangente. Il en est de même pour les trois autres côtés du quadrilatère. Le cercle est donc inscrit dans ABCD.



ii) $\Rightarrow$ iii).

On conserve les notations précédentes. En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles OMA et OQA, on montre que AM = AQ. On obtient de façon analogue les égalités : QD = PD ; PC = CN ; NB = BM.

$AB + CD = (AM + MB) + (CP + PD) = (AQ + NB) + (CN + QD) = (AQ + QD) + (CN + NB) = AD + CB$.

iii) $\Rightarrow$ i).

On sait que $AB + CD = AD + CB$. Soit M, N, P et Q les projetés orthogonaux de O sur (AB), (BC), (CD) et (DA).

O désigne le point d'intersection des bissectrices de $\hat{A}$ et de $\hat{D}$. Alors on a OM = OQ = OP.

Par des considérations de distances analogues à celles utilisées précédemment, on obtient MB + CP = BC. Considérons les cercles de centres B et C de rayons respectifs BM et CP. (OM) est une tangente au premier et (OP) est une tangente au second. Or la distance des centres est égale à la somme des rayons. Alors, les cercles sont tangents extérieurement en N, et ils possèdent une tangente commune en ce point qui est l'axe radical de ces cercles. La puissance de O par rapport aux deux cercles étant égale (car OM = OP), O appartient à l'axe radical de ces deux cercles, autrement dit (ON) $\perp$ (BC) d'une part et

ON = OM = OP d'autre part. De ce fait, O appartient à la bissectrice intérieure de $\hat{B}$ ainsi qu'à celle de $\hat{C}$. Les quatre bissectrices intérieures sont donc sécantes en un même point.

Code de tri de distribution : Vous avez pu remarquer, sur l'étiquette de ce Corol'aire, un numéro de quatre chiffres, en bas et à droite de votre adresse. Il s'agit du numéro de la tournée de votre facteur que La Poste nous oblige d'indiquer pour les envois de presse. Vous pouvez contrôler ce numéro sur les magazines que vous recevez par La Poste. Si celui qui figure sur cet envoi est erroné, merci de le signaler par Mél à Jean Fromentin : jeanfromentin@wanadoo.fr