

Edito

Pour une APMEP positive et croissante

En cette rentrée 2005, la loi Fillon sur l'Ecole se met en place laborieusement : rappelons les mouvements lycéens du printemps dernier, la longue grève administrative des directeurs d'école, les réactions vives (dont celle de l'APMEP) à la suppression des TPE en terminale ... Le Haut Conseil de l'Éducation, censé définir les grandes orientations, notamment le "socle commun de connaissances", n'est toujours pas constitué. En ce qui concerne les sciences, la crise des vocations se confirme, alors que la vague des départs à la retraite du papy-boom a commencé.

En mathématiques, la rentrée est marquée par trois nouveaux programmes : Sixième, Première L (option), Première STG. Le nouveau programme de Sixième est la première étape de la rénovation de tous les programmes de collège. Cette rénovation doit malheureusement tenir compte de la réduction des horaires de mathématiques, que nous continuons à dénoncer. L'option de première L propose des innovations intéressantes comme la logique ou l'algorithmique : espérons qu'elles motiveront les élèves littéraires.

En STG, l'analyse a été dégonflée au profit de l'information chiffrée et des proba-stat, ce qui est une bonne chose : mais l'incitation au travail sur tableur risque de rester lettre morte compte tenu de l'absence de dédoublement.

Tout ce contexte n'incite pas vraiment à l'enthousiasme. Pourtant, notre Régionale APMEP préfère réagir de façon positive, en proposant des outils pour réfléchir, innover, travailler autrement : conférence le 12 octobre, participation aux Journées Nationales de Caen à la Toussaint, Assemblée Générale le 7 décembre, exposition "Cube" à votre disposition, préparation du Rallye, partenariat avec l'IREM et l'Espace Mendès-France ... Les activités ne manquent pas, sans compter le projet d'organiser les Journées 2008 !

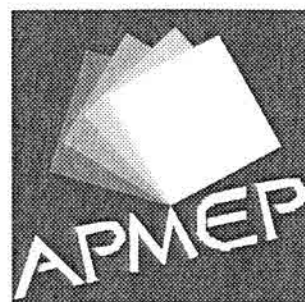
Je vous invite à faire adhérer les collègues autour de vous, de façon que notre association soit à la fois plus riche dans ses débats et plus écoutée par les décideurs. Et qu'en développant les liens entre collègues, elle soit vraiment une aide aux enseignants dans leur pratique.

Louis-Marie BONNEVAL

SOMMAIRE

Édito	p. 1
Vie associative	
Journées Nationales - ExpoCube	p. 2
Ils nous ont quittés	p. 3
Manifestations mathématiques	p. 3
Défi-Collège	p. 4
Rallye	p. 5 et 8
Conférence Michel BLAY	p. 6 et 7
Rubricol(l)age	p. 9 à 11
Bulletin d'adhésion	p. 12

Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l'Enseignement
Public



Régionale de
Poitou-Charentes

n°62

Septembre 2005

Dispensé de timbrage Poitiers Centre de tri

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX



PRESSE
DISTRIBUE PAR
LA POSTE

DÉPOSÉ LE 26/09/05

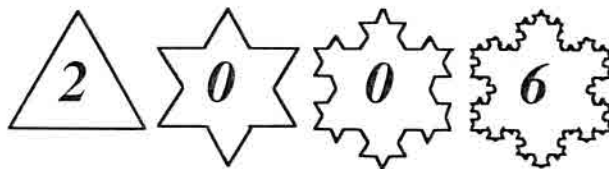
M. FREDERIC DE LIGT
3 RUE DE LA PIERRIERE
17270 MONTGUYON

APMEP : <http://irem.univ-poitiers.fr/apmep>
Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Le numéro : 1 €
Abonnement 1 an (4 numéros) : 3,5 €
ISSN : 1145 - 0266

Directeur Louis-Marie BONNEVAL
Comité de rédaction ... C. BLOCH, S. PARPAY,
J. FROMENTIN, F. DE LIGT
Imprimerie IREM, Faculté des Sciences
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS - CEDEX
Editeur APMEP Régionale de Poitiers
Siège social IREM, Faculté des Sciences
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P. n° 73 802
Dépôt légal Septembre 2005

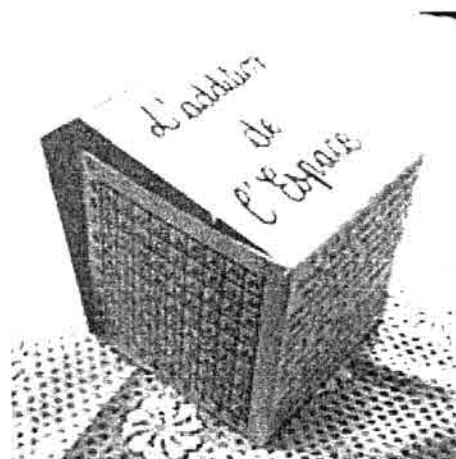
Rallye Mathématique Poitou-Charentes



Vous trouverez dans les pages centrales de ce Corollaire les éléments de solutions de la dernière épreuve du Rallye Mathématique de Poitou - Charentes. Les épreuves, les solutions de la dernière édition et des précédentes sont téléchargeable sur le site de la Régionale (<http://irem.campus.univ-poitiers.fr/apmep/>).

Comme les années précédentes, vous y trouverez aussi les morceaux choisis de l'édition 2005 : des présentations très originales de solutions souvent en rapport avec la situation décrite dans le problème. Ne manquez pas d'aller les découvrir avec vos élèves. Ces morceaux choisis leur donneront des idées pour la prochaine édition. Le calendrier n'est pas encore établi, mais les dates devraient être sensiblement les mêmes que celles de l'an dernier : réception de l'épreuve d'entraînement mi janvier 2006, inscription avant les vacances de février et épreuve dans la première quinzaine d'avril. N'hésitez pas à nous envoyer des problèmes ou des idées de problèmes, ou même à vous joindre à l'équipe du Rallye.

Contact : Y. Noël, responsable de l'équipe « Rallye » (yvonne.noel@free.fr)



JOURNÉES de l'APMEP Mathématiques à la mode de...

à CAEN du vendredi 21 au lundi 24 octobre 2005

Les Journées Nationales de l'APMEP auront lieu à CAEN du vendredi 21 au lundi 24 octobre 2005. Ce rendez-vous annuel qui réunit en moyenne près de 800 professeurs de mathématiques est un événement pour la profession : 9 conférences sur quatre plages horaires, près de 80 ateliers, de nombreux exposants (livres scolaires et scientifiques, matériels audiovisuels et informatiques, matériels pédagogiques...), réunion des commissions de l'APMEP, réunion des Régionales et, bien sûr, un peu de tourisme pour clore l'événement.

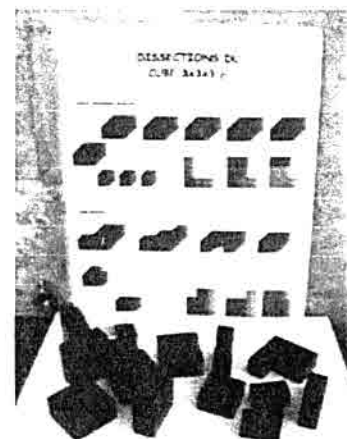
Vous pourrez aussi vous procurer la dernière des brochures « JEUX » de l'APMEP. JEUX 7 sera en effet disponible sur le stand de l'APMEP pendant ces Journées.

Vous pouvez encore vous inscrire par Internet à l'adresse suivante : <http://www.apmepjn-caen.net/>

EXPOCUBE est à votre disposition (voir le Corollaire 61).

Elle est composée de douze panneaux, d'une trentaine d'objets à observer ou à manipuler et d'un livret d'accompagnement. Il faut maintenant la faire vivre. Les enseignants qui désirent montrer et utiliser, avec leurs élèves, cette exposition réalisée par l'APMEP sur le thème du cube peuvent contacter Frédéric de Ligt par courrier électronique à l'adresse suivante : deligt@wanadoo.fr.

Elle peut être exploitée depuis l'école primaire jusqu'au lycée.



M. Pierre NAUD est décédé le 9 mars 2005.

Sa fidélité à l'A.P.M.E.P. a été exemplaire. Il était sans doute le plus ancien adhérent de notre Régionale et continuait à suivre avec intérêt, dans Corol'aire, les comptes rendus de nos activités. Dans les années 60 et 70, il a contribué activement, en particulier avec Jacques FORT alors président, à l'animation de la Régionale.

Professeur agrégé au Lycée Fontanes de Niort, il enseigna les mathématiques avec passion et un immense talent de pédagogue. L'algèbre, l'arithmétique, la géométrie, la trigonométrie, la géométrie descriptive, la cosmographie et la mécanique (matières enseignées à l'époque, dont certaines abandonnées et peut-être inconnues des nouveaux collègues) n'avaient pas de secrets pour lui. Très attentif à ses élèves, il était d'une discrète amabilité avec tous et ne se mettait jamais en colère.

J'ai eu l'immense chance de l'avoir comme professeur en Première et en Math-élem. Je me permets de vous livrer avec nostalgie quelques petites anecdotes. Je me souviens, entre autres, du refrain qu'il nous apprenait pour les additions des sinus et cosinus : « si-co, co-si, co-co, si-si. Et n'oubliez pas le -2 dans la dernière formule ! », du doigt pointé à l'improviste vers un élève : « $\cos(\pi/2-x) = ?$ » et aussitôt vers un autre « $\lg(a-b) = ?$ », de la phrase mnémotechnique « 0 Beautiful

And Fine Girl Kiss Me Now » pour la classification des étoiles (phrase qu'il disait avec un petit sourire discret), des dessins d'une grande précision qu'il traçait sans hésitation au tableau - ah le calcul du volume de la pyramide !, ah les sphères de Dandelin !, des tableaux impeccables pour « le signe du trinôme avec paramètre m et la position d'un nombre par rapport aux racines », des problèmes sur les faisceaux de cercles et sur l'inversion....

Plus tard, nommé au Lycée Fontanes, j'ai pu apprécier son accueil chaleureux et continuer à profiter de ses idées et de ses conseils.

M. NAUD fut nommé ensuite I.P.R. de l'Académie de Poitiers. Il fit preuve dans ses nouvelles fonctions de sa grande expérience avec efficacité et courtoisie.

Il prit sa retraite à Niort. Tous les ans, il assistait à l'assemblée de l'Association des Anciens Elèves du Lycée et du Collège Fontanes, nous marquant ainsi son attachement.

À Mme Solange NAUD, à ses enfants Michel et Françoise* et à leur famille, nous présentons toutes nos condoléances.

S. Parpay.

* Françoise et Vincent FIELBARD, professeurs au Lycée Léonce Vieljeux de La Rochelle sont les responsables de la Charente-Maritime au sein de notre Régionale.

C'est avec tristesse que nous avons appris le décès de Jean-Pierre MAROT, conjoint de notre collègue Madeleine MAROT. Par ce mot, nous voulons adresser à Madeleine et à son fils Stéphane nos sincères condoléances.

Exposition d'instruments et de collections scientifiques, XIX^{ème} siècle et première moitié de XX^{ème} siècle.

Du 13 septembre au 14 octobre 2005

Cette exposition est réalisée dans le cadre de l'année mondiale de la Physique par le CRDP et l'inspection Régionale de Physique-Chimie et se tient à la chapelle du CRDP. Elle réunit le patrimoine scientifique de différents lycées et collèges de Poitiers. Toute une équipe de professeurs s'est fortement investie dans cette réalisation et animera la visite en donnant des explications ou en procédant à des manipulations.

Plusieurs thèmes sont abordés : la pression atmosphérique, l'électricité, l'optique, l'acoustique, la biologie et la mathématique.

Pour plus d'informations, et en particulier pour accéder au planning des animations et aux documents pédagogiques, consultez le site du CRDP à l'adresse suivante :

http://web.crdp-poitiers.org/manifestations/expo_physique/index.htm



Espace MENDES FRANCE – Poitiers (<http://www.maison-des-sciences.org/>)

Jeudi 20 octobre 2005 – 18H30 à l'Espace Mendès France à Poitiers

Conférences d'Agathe KELLER,

Charée de recherche CNRS, CEIAS-Rehseis.

Mathématiques, textes et société dans l'Inde médiévale

Cette présentation fera un état des lieux de la recherche concernant les rapports entre mathématiques, culture savante et populaire dans l'Inde médiévale. Nous savons en effet peu du contexte social dans lequel les textes mathématiques en langue sanskrite, datant du V^{ème} au XV^{ème} siècle ont été produits. Cependant, les formes textuelles employées, les sujets abordés, certaines biographies d'auteurs, permettent parfois de jeter une lumière sur les milieux qui produisirent ces textes. Nous nous intéresserons également à la notion de texte mathématique dans une culture qui privilégie la transmission orale du savoir, et nous verrons comment le fait de poser ces questions permet de mieux reconstituer certaines pratiques mathématiques dont les textes témoignent... silencieusement. Finalement, nous verrons comment cette histoire, encore peu connue, peut être l'enjeu de véritables débats politiques en Inde aujourd'hui.

Défi-Collège

À la suite de l'appel lancé dans la dernière rubrique (Corollaire n° 61 - page 14), voici ce que nous a transmis Gilles Maréchal du Lycée St Joseph de Bressuire.

Résolution par diverses méthodes.

Un article du Bulletin Vert n° 457 de Mars 2005 de l'APMEP m'a donné l'idée d'un prolongement en Terminale.

L'exercice ci-dessous a été donné en travail de semaine à des élèves de terminale S en mai 2005.

Le barème prévu a dû être aménagé : 1 point par méthode utilisant seulement des outils de seconde, 2 points par méthode utilisant des outils de terminale.

En plus de méthodes données dans l'article, d'autres méthodes ont été utilisées :

- angles orientés
- avec un repère adapté: équation de droite, vecteurs colinéaires, complexes,
- toujours avec un repère: barycentre, homothétie (!)
- vérification graphique.

Cette expérience a permis aux élèves d'échanger plus que d'habitude, sans pour autant faire de la "photocopie".

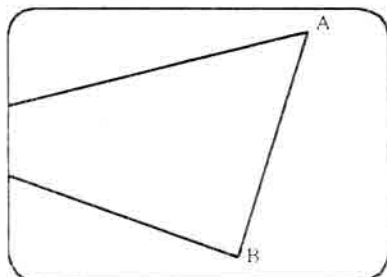
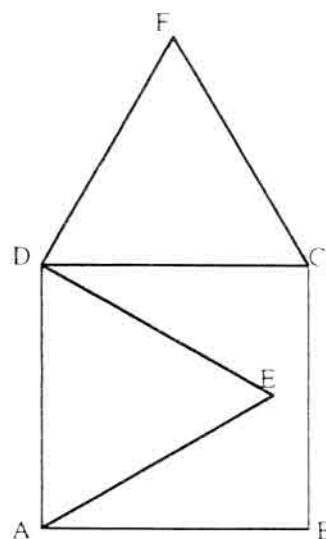
Il serait intéressant d'avoir d'autres situations simples et riches.

Gilles Maréchal.

$ABCD$ est un carré direct.
 AED et DCF sont des triangles équilatéraux directs.

Démontrer que B , E et F sont alignés
 de plusieurs façons
 en caractérisant la méthode
 (par exemple "en utilisant les angles géométriques: ")

1 point par méthode, maximum 10 points

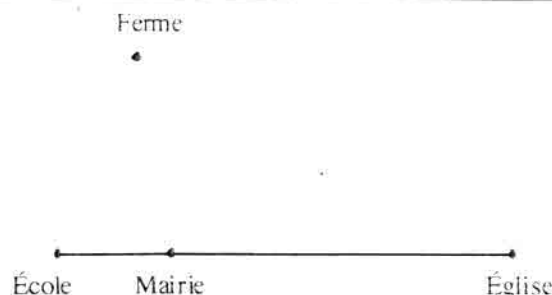


En ce qui concerne le tracé de la bissectrice de l'angle ABC , (problème proposé dans le Corollaire n° 61 de juin dernier), vous avez bien sûr, avec le même dessin, les autres problèmes classiques suivants : tracer la médiane et la hauteur issues de C et tracer les médiatrices des côtés $[AC]$ et $[BC]$. Ces problèmes sont sources d'échanges très riches avec les élèves qui les ont cherchés. Les élèves ont souvent des difficultés à exprimer les méthodes choisies et à les justifier. C'est un bon moyen de les faire progresser dans ce domaine.

Voici un autre défi trouvé sur le site du rectorat de Montpellier (Rallye mathématique de Ganges et de l'académie de Montpellier) [<http://pedagogie.ac-montpellier.fr/Disciplines/maths/apmep/activite/bombyx/jeux2.htm>]. C'est le problème n°3 des quarts de finale du 14^{ème} rallye 2001-2002 en Seconde professionnelle. Ce problème peut être en effet résolu avec les outils disponibles en collège. Nous nous ferons un plaisir de publier vos solutions.

Dans notre village, il n'y a qu'une seule route toute droite sur laquelle on rencontre successivement l'école, puis 100 mètres plus loin la mairie, puis 300 mètres plus loin l'église.
 Notre ferme se trouve au milieu des champs, deux fois plus éloignée de l'église que de la mairie. À quelle distance est-elle de l'école ?

On pourra s'aider du croquis ci-contre.



N'hésitez pas à nous envoyer de tels problèmes à destination de nos élèves et à nous rendre compte de la recherche qui a eu lieu en classe.

Jean Fromentin

Perles dans nos copies

Terminale

Plus coté à l'argus

Lorsque le véhicule atteint 599 960 000 km, son prix de vente est nul.

C'est le néant !

Dans l'espace, deux droites sont soit parallèles soit sécantes soit rien du tout.

Quatrième

Il faut tempérer !

À la fin d'une démonstration : « On voit bien que le triangle est équatorial »

Éléments de solutions (page 1)

3 Le bijou de Belinda Fram-Heto (15 points)

-

faut considérer les sommes

sur la couche repérée par le nombre 2, il faut considérer les sommes 13 et ainsi de suite, jusqu'à la dernière couche repérée par le nombre 9 où il faut considérer la somme 6. Ces choix successifs sont matérialisés sur le dessin ci-dessus par les points disposés en diagonale.

Ainsi, comme $2 \times 5 + 2 \times 6 + 2 \times 7 + 2 \times 8 + 1 \times 9 = 61$, Stanley rencontre **61 fois le nombre 15**. Le 14 et le 16 sont rencontrés seulement 60 fois.

5 Une aînée de 3 jours pour 3 années ! (5 points)

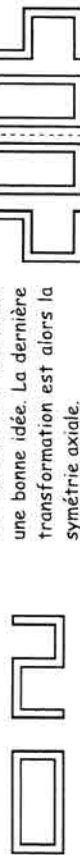
Entrer dans sa trente et unième année, c'est avoir trente ans révolus. Chantal qui n'a pas encore trente ans est donc dans sa trentième année. Maryse est donc née le 30 décembre 1973 et Chantal le 2 janvier 1974.

6 Logigrilles (10 points)

À droite de chaque numéro de cadre figure sa valeur en "triangles". C'est le cadre 3 qui a la plus grande valeur.

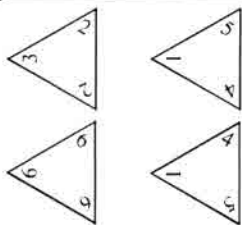
1	7	2	5	3	9	4	4	5	8	6	5	7	7	8	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

NATURE ne peut pas être le premier mot codé à cause de l'emplacement des deux lettres identiques. Il est donc codé par le deuxième mot qui permet de trouver le mot cherché : BUREAU qui est un meuble. Ce qui donne la réponse 3.



7 Triomino (10 points)

Les pièces du jeu « Triomino » sont des triangles équilatéraux ayant sur une seule face et à chaque sommet un nombre de 1 à 6. Toutes les pièces sont différentes. Combien ce jeu comporte-t-il de pièces ? Puisqu'il y a 6 valeurs possibles pour chaque sommet, il y a donc 6 pièces triples et $6 \times 5 = 30$ pièces doubles. Il y a $(6 \times 5 \times 4) / 6$ façons de choisir trois nombres parmi six pour obtenir les pièces simples. Mais chaque choix donne deux pièces, par symétrie (fig. ci-contre). Il y a donc 40 pièces simples. Il y a donc en tout 76 pièces dans ce jeu.



8 Palindrome (5 points)

La différence la plus souvent rencontrée entre deux palindromes consécutifs de quatre chiffres est 110 (2662 - 2552 par exemple) et 100 pour les palindromes à 5 chiffres (35353 - 35253 par exemple). Les plus petites différences se rencontrent aux changements de milliers ou de dix milliers. Elle est de 11 pour les palindromes à 4 chiffres (2002 - 1991 par exemple) et pour les palindromes à 5 chiffres (30003 - 29992). Elle n'est que de 2 quand on passe du dernier palindrome à 4 chiffres au premier palindrome à 5 chiffres (10001 - 9999).

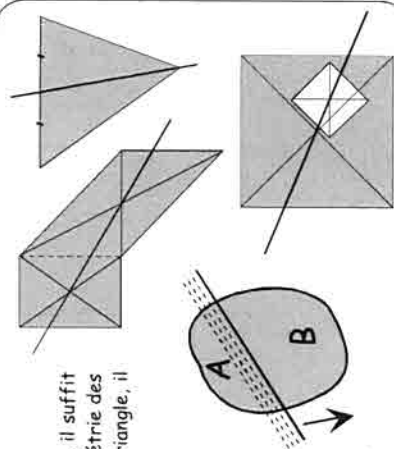
9 Tour de piste (5 points)

Soit r le rayon du petit cercle du gobelet et R le rayon du grand cercle. Le gobelet faisant dix tours sur lui-même pour faire un tour complet de "piste", on a : $2\pi r \times 10 = 2\pi \times 30$ et $2\pi R \times 10 = 2\pi \times 40$. D'où $r = 3$ cm et $R = 4$ cm. On aurait pu aussi demander la hauteur du gobelet !

10 De part en part (10 points)

Pour partager ces figures en deux aires égales, il suffit de faire passer la droite par les centres de symétrie des carrés, rectangle ou parallélogramme. Pour le triangle, il suffit de tracer une médiane.

Mais ce ne sont pas les seules solutions. Rappelons que toute droite qui "balaye" une surface la partage obligatoirement en deux aires égales à un instant donné.



$A < B$ puis $B < A$. Donc, à un moment donné, $A = B$.

11 Les J.O. de Pékin. (10 points)

Si on dispose chaque lettre dans son cercle, il y a 2 ou 3 zones possibles à chaque fois. Si l'on tolère que 2 lettres puissent être dans la même zone cela donne un total de $2 \times 3 \times 3 \times 2 = 108$ dispositions différentes. Parmi celles-ci on compte celles où 2 lettres se trouvent dans la même zone :

- 1) P et E dans la même zone. $3 \times 3 \times 2 = 18$ dispositions.
- 2) E et K dans la même zone. $2 \times 3 \times 2 = 12$ dispositions.
- 3) K et I dans la même zone. $2 \times 3 \times 2 = 12$ dispositions.
- 4) I et N dans la même zone. $2 \times 3 \times 3 = 18$ dispositions.

Comme 3 lettres ne peuvent se trouver dans la même zone, les dispositions 1) et 2) ne se recouvrent pas : de même pour 2) et 3), et de même pour 3) et 4).

Il y a 2 dispositions communes au 1) et 3). Il y a 3 dispositions communes au 1) et 4).

Il y a 2 dispositions communes au 2) et 4). Finalement on obtient :

$$108 - (18 + 12 + 12 + 18) + (2 + 3 + 2) = 55 \text{ dispositions répondant au problème.}$$

Compléments pour la classe de Seconde

12 Une belle surface (15 points)

Voici le dessin du dodécagone et de l'étoile obtenue par découpage. Pour gagner de la place, l'étoile a été inscrite dans le dodécagone, ce qui vous donnera certainement des idées de recherches.

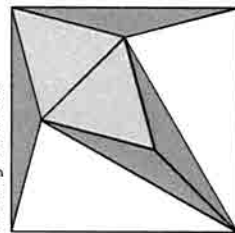
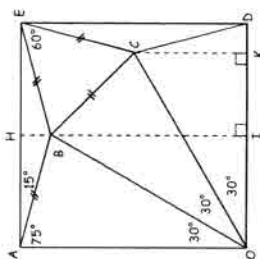
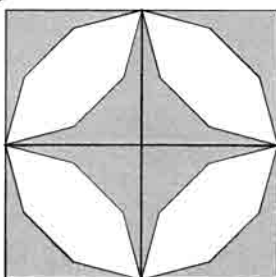
$$A(OCB) = OB \times CK / 2 = (R \times R \sin 30^\circ) \times 0,5 = 25 \times 0,25 \text{ cm}^2$$

$$A(\text{Dodécagone}) = 12 A(OCB) = 75 \text{ cm}^2.$$

Et donc l'aire de l'étoile est égale à 25 cm^2 , c'est-à-dire à $1/3$ de l'aire du dodécagone !

Fort de cette remarque, voici comment obtenir ce résultat par découpage. Considérons un quart de figure : l'angle DOB est de 60° . I est donc le milieu de $[OD]$. Le point B est donc sur la médiatrice de $[OD]$, et ABE est donc un triangle isocèle.

Compte tenu des valeurs des angles portées sur le dessin, on en déduit que BCE est un triangle équilatéral. D'où le découpage suivant qui montre que le quart d'étoile a la même aire que chacun des trois triangles isocèles de sommet O .



13 Au supermarché (5 points)

Soit x la masse de matière sèche et y la masse totale. On a : $\frac{40}{100} x = \frac{7,9}{100} y$; $\frac{x}{y} = \frac{7,9}{40} = \frac{19,75}{100}$

La masse liquide représente donc 80,25 % de la masse totale.

Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l'Enseignement
Public



La Régionale A.P.M.E.P.
de Poitou-Charentes
vous invite à participer
à la conférence

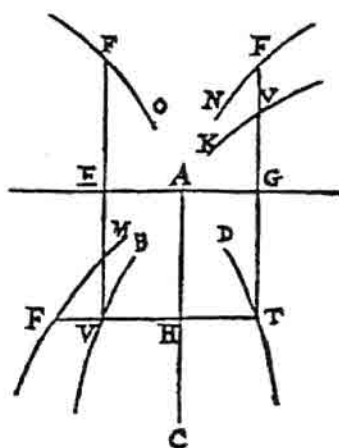
Michel BLAY

Michel Blay, directeur de recherche au CNRS,
est docteur en histoire et philosophie des sciences
et docteur d'Etat ès lettres et sciences humaines.

Il est actuellement directeur adjoint chargé de la
recherche à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud
et rédacteur en chef de la Revue d'histoire des sciences.

Il est un spécialiste de l'histoire de la mathématisation
aux 17^{ème} et 18^{ème} siècles.

L'infini au 17^{ème} siècle



*La réflexion sur l'infini - compréhension,
statut, enjeux théologiques - est l'une des
grandes affaires du XVII^e siècle.*

*En effet c'est au cours de la première moitié
de ce siècle que la diversité des questions
sur l'infini est apparue dans toute son
ampleur en relation avec ses dimensions
d'inquiétude et de souci métaphysique.*

*Comment penser la nouvelle science sans
penser pleinement l'infini ?*

*Comment construire la nouvelle science au
milieu des débats sur l'infini ?*

*La conférence s'attachera à répondre à ces
deux questions*

POUR AFFICHAGE

ANGOULÊME

le mercredi 12 octobre

à 14h30

au collège Jules Verne

1 rue du Petit St Cybard

C'est aussi la rentrée pour vos Rubricol'ages. Le courrier reçu pendant les vacances a été abondant. En voici seulement une partie.

Des problèmes

62-1 Le Bijou de Belinda Fram-Heto

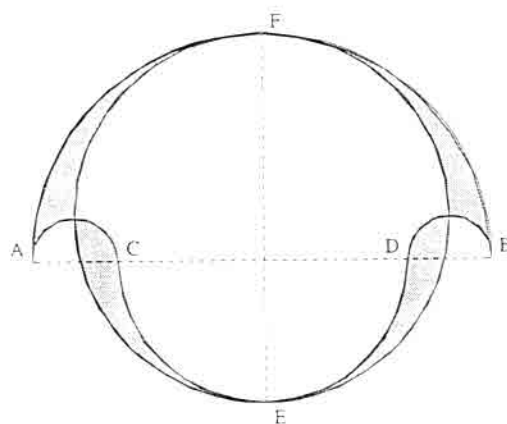
L'exercice 5 du rallye de cette année portait sur le salinon.

Le partage du diamètre [AB] en six parties égales avait été choisi pour que les élèves puissent faire facilement les calculs.

Mais le problème est plus général. Données :

- Demi-cercle de diamètre AB = 2R ;
- Deux demi-cercles de diamètres AC et DB, (AC = DB = 2r) ;
- Le demi-cercle de diamètre CD ;
- Le cercle de diamètre EF.

Montrer que les quatre parties grisées ont la même aire. Trouver cette aire en fonction de R et de r.



Prof. Ila Ransor

62-2 Au temps de Pappus (fin du 3^{ème} siècle) : un théorème

Soit deux droites (Δ) et (Δ'). A, B et C trois points de (Δ). A', B' et C' trois points de (Δ') tels que (AB') // (CA') et (A'B) // (C'A). Les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

« Je ne veux pas me fatiguer à vous donner une démonstration de ce théorème aussi connu »

Jame Ferla-Sieste

Glané par Léa brouille

- « Défiiez-vous des ensorcellements et des attraits diaboliques de la géométrie » Fénelon (André Delachet – La géométrie contemporaine – Que sais-je n° 401)
- « Le cercle baisant », pour plus de renseignements : le livre très intéressant de R. Lutz, A. Makhlouf et E. Meyer « Fondements pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordre de grandeur : les réels dévoilés » (Publication de l'APMEP n° 103).

Louis-Marie Bonneval m'a aimablement communiqué les trois problèmes suivants :

62-3 concours général 2005 :

Soit f une fonction de $[0 : 1]$ vers $\mathbf{R}$, continue sur $[0 : 1]$, telle que $f(0) = f(1) = 0$. On suppose que pour tout x de $[0 : 7/10]$ $f(x + 3/10) = f(x)$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions dans $[0 : 1]$.

62-4 cité par Dominique Roux dans sa conférence à l'IREM le 3 juin 2005 :

Soit ABC un triangle tel que AB = AC et $\hat{BAC} = 20^\circ$. On construit D sur [AC] tel que $\hat{CBD} = 60^\circ$, et E sur [AB] tel que $\hat{BCE} = 50^\circ$. Calculer l'angle BDE.

62-5 magazine logimath :

À un congrès, il y a 2005 participants. Chacun est repéré par son numéro d'inscription. Le congressiste n°1 a donné une poignée de mains, le congressiste n°2 a donné 2 poignées de mains, le congressiste n°3 a donné 3 poignées de mains, etc. Jusqu'au congressiste n°2004 qui a donné 2004 poignées de mains. Combien de poignées de mains a données le 2005^e congressiste ?

Et enfin un problème d'approximation.

62-6 de Jean-Christophe Laugier (Roche fort) :

Montrer que pour tout entier naturel n , il existe des entiers naturels k et l tels que $n = [k\sqrt{2} + l/3]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x .

Des solutions

Claude Morin de Limoges revient sur trois problèmes déjà résolus dans des rubriques antérieures. Voici ses très élégantes solutions :

52-2 (de Serge Parpay) :

Soit un quadrilatère convexe ABCD dont les diagonales se coupent en O. K est l'orthocentre du triangle ADO, H est l'orthocentre du triangle CBO, I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. Montrer que les segments [HK] et [IJ] sont orthogonaux.

Solution de Claude Morin :

- 1) $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BC} + \vec{CJ}$ donc $2\vec{IJ} = \vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD}$.
- 2) $\vec{HK} \cdot \vec{AC} = (\vec{HB} + \vec{BD} + \vec{DK}) \cdot \vec{AC} = \vec{BD} \cdot \vec{AC}$ car $\vec{HB} \perp \vec{AC}$ et $\vec{DK} \perp \vec{AC}$.
- 3) $\vec{HK} \cdot \vec{BD} = (\vec{HC} + \vec{CA} + \vec{AK}) \cdot \vec{BD} = \vec{CA} \cdot \vec{BD}$ car $\vec{HC} \perp \vec{BD}$ et $\vec{AK} \perp \vec{BD}$.
- 4) On en déduit $\vec{HK} \cdot 2\vec{IJ} = \vec{BD} \cdot \vec{AC} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = 0$. Donc $\vec{HK} \perp \vec{IJ}$.

58-1 (de Jacques Drouglazet) :

On donne les suites numériques u, v, w définies par $u_0 = 1 ; v_0 = \sqrt{2} ; w_0 = 2 ; u_{n+1} = |v_n - u_n| ; v_{n+1} = |w_n - v_n| ; w_{n+1} = |u_n - w_n|$ pour tout entier naturel n . On considère alors l'ensemble $E_n = \{u_n ; v_n ; w_n\}$. Donner l'expression de l'ensemble E_n en fonction de n . Montrer que cet ensemble a pour limite l'ensemble $\{0 ; 0 ; 0\}$ quand n augmente indéfiniment. Reprendre l'exercice en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{3}$.

Solution de Claude Morin :

1) Notons $E_n = (a_n, b_n, c_n)$ avec $a_n \leq b_n \leq c_n$. Pour $n \geq 1$ on a $c_n = a_n + b_n$ et $0 \leq a_n$. On en déduit $c_{n-1} = b_n$, $a_{n-1} = \min(a_n, b_n - a_n)$, $b_{n-1} = \max(a_n, b_n - a_n)$. La suite (c_n) est décroissante minorée par 0 donc converge vers L ; par suite (b_n) converge aussi vers L et (a_n) vers 0. Si $L > 0$, on a pour $n \geq n_0$: $a_n = 0$, $b_n = c_n = L$. On peut alors remonter jusqu'à E_1 qui est de la forme $E_1 = (x, y, z)L$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$. Par suite si $E_0 = (1, \sqrt{2}, 2)$ on a nécessairement $L = 0$ (car $\sqrt{2}$ est irrationnel).

2) En fait on remarque que pour $E_0 = (1, \sqrt{2}, 2)$ on a $E_1 = (\sqrt{2} - 1)E_0$ donc $E_{2n+1} = (\sqrt{2} - 1)^n E_1$ et $E_{2n} = (\sqrt{2} - 1)^{n-1} E_2$; on retrouve bien $L = 0$. Si $E_0 = (1, \sqrt{3}, 2)$ on observe $E_1 = (2 - \sqrt{3})E_0$ d'où encore $L = 0$.

Si $E_0 = (1, \sqrt{5}, 2)$ on observe $E_1 = (\sqrt{5} - 2)E_0$, d'où encore $L = 0$.

3) On peut en fait généraliser à $\sqrt{d}$: si $E_0 = (1, \sqrt{d}, 1 + \sqrt{d})$ il existe des entiers T, a et b tels que $E_{n-T} = |a - b\sqrt{d}| E_n$.
Démonstration :

Partons de $E_0 = (1, x, 1+x)$ avec $x > 1$. On peut raisonner seulement avec le couple $(1, x)$. Si q_0 est la partie entière de x , on arrive en q_0 étapes à $(x - q_0, 1) = (x - q_0) \cdot (1, x_1) = \frac{1}{x_1} (1, x_1)$. Si on pose $x = q_0 + \frac{1}{x_1}$, il s'agit de la décomposition de x en

fraction continue ; on arrive après $\sum_{k=0}^{n-1} q_k$ étapes à $E_n = \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} (1, x_n, 1+x_n)$. On retrouve que si x est rationnel la suite

est stationnaire ($x_n = q_n$ pour un certain n) alors que si x est irrationnel, la suite $a_n = \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}$ est décroissante et minorée

par 0, donc converge vers a , d'où $a = 0$. Si $x = \sqrt{d}$, le développement est périodique :

$$\sqrt{d} = [q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n] \text{ avec } q_n = 2q_0.$$

On peut alors montrer que $T = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ et que $x_1 x_2 \dots x_n = a - b\sqrt{d}$ où (a, b) est la solution fondamentale de l'équation de Pell-Fermat $[x^2 - dy^2] = 1$ et par suite $E_T = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} E_0$.

59-5 (de Louis Rivoallan) :

On considère les nombres à n chiffres (en base dix) tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. On accepte que contrairement à l'usage, les chiffres « de gauche » soient égaux à 0. Il y a à l'évidence deux nombres qui répondent à la question : 0 et 1, que l'on fait précéder de $(n - 1)$ zéros avec la convention précédente. Montrer, que pour tout n , il y a 2 autres nombres écrits avec n chiffres qui répondent à la condition.

Solution de Claude Morin :

On obtient par l'algorithme d'Euclide les deux solutions à n chiffres :

$X_n = 5^n x = 2^n y + 1$ et $X'_n = 2^n x' = 5^n y' + 1$ avec $0 < x < 2^n$ et $0 < x' < 5^n$. On en déduit :

- 1) $x' = 5^n - y$ et $y' = 2^n - x$, d'où $X_n + X'_n = 10^n + 1$, autrement dit, si $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont les suites des chiffres de X_n et X'_n (en commençant par le chiffre des unités) on a $a_1 = 5, b_1 = 6$ et pour $k \geq 2$: $a_k + b_k = 9$.
- 2) $X_{n+1} - X_n = 10^n k$ et $X'_{n+1} - X'_n = 10^n k'$.

- 1) Par un petit calcul, on a aussi X_{n-1} congru à X_n^2 modulo 10^{n-1} mais ce n'est pas valable pour X'_{n-1} .
 2) Remarque : le calcul de X_n par l'algorithme d'Euclide étendu est très rapide : avec une TI92 on obtient X_{200} en 15 secondes.

60-2 de Jean-Christophe Laugier (Rochefort) :

Quel est le plus petit carré dont l'écriture décimale commence par 2005 ?

Solution de Louis Rivoallan :

Il faut envisager 2 cas, suivant que le nombre a un nombre de chiffres pair ou impair. Si le nombre a un nombre de chiffres pair, alors il s'écrit $0,2005... \times 10^{2n} = a \times 10^{2n}$. Si le nombre de chiffres est impair, il s'écrit $2,005... \times 10^{2n} = a' \times 10^{2n}$. Dans chacun des cas, le nombre a ou a' étant un nombre décimal.

Cas numéro 1. On a $0,2005 < a < 0,2006$; la fonction racine carrée étant croissante, on a : $\sqrt{0,2005} < \sqrt{a} < \sqrt{0,2006}$ et par suite $0,447777... < \sqrt{a} < 0,447884$. Le nombre s'écrit donc 447..... On connaît les trois premiers chiffres de $\sqrt{a}$. Il suffit de tester la décimale suivante qui est un 7 ou un 8. On a de la chance car $4478^2 = 20052484$.

Cas numéro 2. On procède de la même manière : $\sqrt{2,005} = 1,41598...$ et $\sqrt{2,006} = 1,4163...$. Le nombre s'écrit 141..., le premier chiffre manquant étant 5 ou 6. Or $1416^2 = 2005056$. Le plus petit nombre dont le carré commence par 2005 est donc 1416.

60-3

Lors des dernières journées nationales de l'APMEP à Orléans, **Francis Jamm** (lycée Lavoisier de Mulhouse) a animé un atelier consacré aux tas de sable. Il a versé du sable sur toutes sortes de surfaces planes découpées dans du carton et notamment sur des quadrilatères convexes. Un participant lui a demandé pour quels quadrilatères convexes on obtenait une pyramide. Sa réponse fut la suivante : « Une condition nécessaire et suffisante est que les bissectrices intérieures soient concourantes, c'est-à-dire que le quadrilatère admette un cercle inscrit ou encore que les sommes des côtés opposés soient égales ». **Francis Jamm** a pu justifier le lien entre l'obtention d'une pyramide et le concours des bissectrices en prenant un argument de projection mais il n'a pas eu le temps de nous prouver l'équivalence des trois dernières propositions. Sauriez-vous combler cette lacune ?

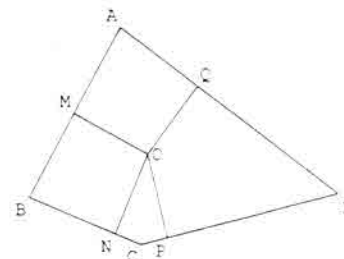
Solution de Louis Rivoallan

Il faut montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Le quadrilatère ABCD a ses bissectrices intérieures concourantes.
- ii) Le quadrilatère ABCD admet un cercle inscrit.
- iii) Les sommes des longueurs des côtés opposés sont égales.

i) $\Rightarrow$ ii).

Soit O le point d'intersection des bissectrices intérieures. Soit M, N, P et Q les projetés orthogonaux de O sur (AB), (BC), (CD) et (DA). (AO) étant un axe de symétrie pour $\hat{A}$, on a $OM = OQ$. De façon analogue, on montre que $OQ = OP$ et que $OP = ON$ et enfin $ON = OM$. Par suite M, N, P, Q sont sur un même cercle de centre O. En utilisant l'orthogonalité de (OM) et de (AB), le cercle précédent admet (AB) comme tangente. Il en est de même pour les trois autres côtés du quadrilatère. Le cercle est donc inscrit dans ABCD.



ii) $\Rightarrow$ iii).

On conserve les notations précédentes. En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles OMA et OQA, on montre que $AM = AQ$. On obtient de façon analogue les égalités : $QD = PD$; $PC = CN$; $NB = BM$.

$AB + CD = (AM + MB) + (CP + PD) = (AQ + NB) + (CN + QD) = (AQ + QD) + (CN + NB) = AD + CB$.

iii) $\Rightarrow$ i).

On sait que $AB + CD = AD + CB$. Soit M, N, P et Q les projetés orthogonaux de O sur (AB), (BC), (CD) et (DA).

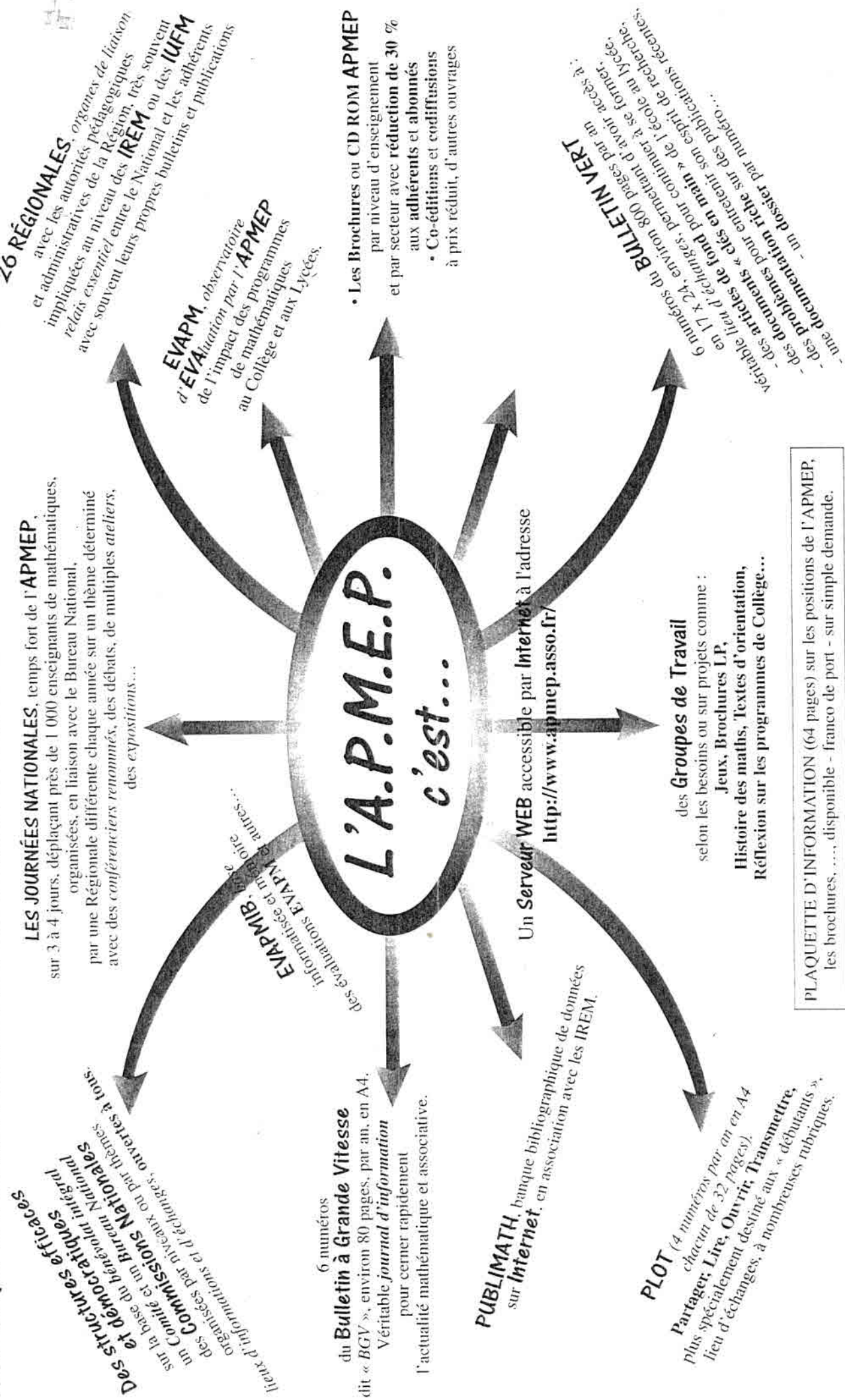
O désigne le point d'intersection des bissectrices de $\hat{A}$ et de $\hat{D}$. Alors on a $OM = OQ = OP$.

Par des considérations de distances analogues à celles utilisées précédemment, on obtient $MB + CP = BC$. Considérons les cercles de centres B et C de rayons respectifs BM et CP. (OM) est une tangente au premier et (OP) est une tangente au second. Or la distance des centres est égale à la somme des rayons. Alors, les cercles sont tangents extérieurement en N, et ils possèdent une tangente commune en ce point qui est l'axe radical de ces cercles. La puissance de O par rapport aux deux cercles étant égale (car $OM = OP$), O appartient à l'axe radical de ces deux cercles, autrement dit (ON) $\perp$ (BC) d'une part et

$ON = OM = OP$ d'autre part. De ce fait, O appartient à la bissectrice intérieure de $\hat{B}$ ainsi qu'à celle de $\hat{C}$. Les quatre bissectrices intérieures sont donc sécantes en un même point.

Code de tri de distribution : Vous avez pu remarquer, sur l'étiquette de ce Corol'aire, un numéro de quatre chiffres, en bas et à droite de votre adresse. Il s'agit du numéro de la tournée de votre facteur que La Poste nous oblige d'indiquer pour les envois de presse. Vous pouvez contrôler ce numéro sur les magazines que vous recevez par La Poste. Si celui qui figure sur cet envoi est erroné, merci de le signaler par Mél à Jean Fromentin : jeanfromentin@wanadoo.fr

À CEUX QUI SE POSENT ENCORE LA QUESTION... POURQUOI ADHÉRER À L'A.P.M.E.P. ?



PLAQUETTE D'INFORMATION (64 pages) sur les positions de l'APMEP, les brochures, ..., disponible - franco de port - sur simple demande.

Voilà pourquoi l'A.P.M.E.P. a besoin de VOUS... Pour renforcer son action, VOTRE ACTION !

Secrétariat permanent au local : 26, rue Duméril - 75013 PARIS - Mail : apmep@apmep.asso.fr