RU - BRI - COL AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse électronique suivante : deligt@wanadoo.fr

Pour ouvrir cette rubrique, Serge Parpay nous propose quelques extraits tirés de ses lectures :

« En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils comparent ; quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de côté et d'autre qu'ils y sont tombés... »
« En mathématiques, comme dans toutes les sciences, chaque époque a en quelque sorte ses questions du moment : il y a des questions vivantes qui fixent à la fois les esprits les plus éclairés comme malgré eux... Il semble souvent que les mêmes idées apparaissent à plusieurs comme une révélation. Si l'on en cherche la cause, il est aisé de la trouver dans les ouvrages de ceux qui nous ont précédés, où ces idées sont présentes à l'insu de leurs auteurs. »
Manuscrits et papiers inédits de Galois – (Bulletin des sciences mathématiques, 2ème série tome XXX p 760)

Extraits du livre « De la méthode en sciences » (Alcan 1910) : Chapitre de Jean Tannery consacré aux mathématiques pures.

Des problèmes

61-1 *de Sébastien Peyrot (Angoulême)* :
On dispose de 5 poids pesant chacun un nombre entier de kilogrammes pour peser tous les poids de 1 kg à 121 kg inclus par combinaison de ces cinq poids. Quels sont ces cinq poids ?

61-2 *de Serge Parpay (Niort)* :
Trois exercices de la classe de Math-Élem, extraits du livre : « Arithmétique – Classe de mathématiques ». - Maillard et Millet (Hachette 1960).
Exercice 1
1) Comment faut-il choisir deux nombres de deux chiffres pour qu'en renversant l'ordre des chiffres le plus petit reste le plus petit ?
2) Même question, le plus petit devenant le plus grand.
Exercice 2
1) Démontrer l'identité $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = (x^2 + 3x + 1)^2 - 1$
2) Déterminer quatre nombres entiers consécutifs dont le produit est 73 440.
Exercice 3
On désigne par $E(x)$ la partie entière du nombre fractionnaire x.
1) Si x est une fraction irréductible, montrer que $x - E(x)$ l'est aussi.
2) Montrer que l'on a $E(x) + E(x + \frac{1}{n}) + \ldots\ldots + E(x + \frac{n-1}{n}) = E(nx)$.

61-3 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Montrer que dans une assemblée d'au moins six personnes il est toujours possible de trouver trois personnes se connaissant mutuellement ou trois personnes mutuellement étrangères.

61-4 *toujours de Jean-Christophe Laugier* :
Une puissance parfaite est un entier de la forme m^n ($m \geq 1$, $n \geq 2$). Les premières puissances parfaites sont donc 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 36, ... A propos des puissances parfaites, deux questions viennent à l'esprit :

1. Quelle est la différence minimale entre deux puissances parfaites consécutives ? Celle-ci peut-elle être atteinte plusieurs fois ?
2. La différence entre deux puissances parfaites consécutives peut-elle être arbitrairement grande ? En d'autres termes, existe-t-il pour tout entier n une suite de n entiers consécutifs ne contenant pas de puissance parfaite ?

La différence minimale entre deux puissances parfaites consécutives est égale à 1 : $3^2 - 2^3 = 1$. La fameuse conjecture de Catalan démontrée par Preda Mihailescu en 2002 affirme que les deux seules puissances parfaites dont la différence est 1 sont 3^2 et 2^3. Voici deux problèmes en rapport avec ce qui précède :
Problème 1 : Montrer que l'équation $3^x - 2^y = 1$ ($x, y \geq 2$) n'a qu'une seule solution $x = 2$, $y = 3$; alors que l'équation $3^x - 2^y = -1$ ($x, y \geq 2$) n'a pas de solution. Cas très particulier de la conjecture de Catalan.
Problème 2 : Montrer que pour tout entier n, il existe n entiers consécutifs dont aucun n'est une puissance parfaite.

Ndlr. Une biographie bien documentée et de lecture agréable d'Eugène Catalan (un mathématicien méconnu à la personnalité attachante) a été publiée en 1996 par la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française (rue de la Halle, 15 – 7000 Mons BELGIQUE – Télé-Fax : 32/(0)65/37.37.29.) sous le titre Eugène Catalan, géomètre sans patrie, républicain sans république.
Par ailleurs des renseignements sur la preuve donnée par le mathématicien roumain Mihailescu à la conjecture de Catalan peuvent être trouvés aux adresses suivantes :
http://www.math.u-bordeaux.fr/~yuri/publ/preprs/catal.pdf
http://www-math.uni-paderborn.de/~preda/papers/catcrelle.ps
http://fr.arxiv.org/abs/math.NT/0502350

61-5 *de Marc Blanchard (Rochefort)* :
Montrer que pour tout entier $m > 0$, il existe une infinité de termes de la suite de Fibonacci qui sont divisibles par m. On rappelle que les nombres de Fibonacci sont définis par : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$; $F_0 = F_1 = 1$.

Des solutions

58-2 *(de Frédéric de Ligt)* :
Un triangle partage son cercle circonscrit en trois arcs. A partir de chaque arc, on construit le symétrique du milieu de l'arc par rapport à la corde qui sous-tend cet arc. Montrer que l'orthocentre du triangle obtenu coïncide avec le centre du cercle inscrit dans le triangle initial.
Quelques infos : Ce problème original que j'ai découvert sur un forum de discussion mathématique et qui y était présenté comme une conjecture m'a beaucoup plu par sa simplicité. Après en avoir trouvé une preuve pas trop calculatoire je vous l'ai soumis. Mais dans le même temps je l'ai proposé à François Lo Jacomo pour sa rubrique « Les problèmes de l'APMEP » dans le bulletin vert (énoncé n°309 du bulletin n°455) ainsi qu'à Roger Cuculière pour sa rubrique « Le coin des problèmes » dans la revue Quadrature (énoncé n° E.236 du numéro 55). Je vous renvoie donc aux solutions qui en seront données dans leurs colonnes.

59-2 *(de Claude Marcy)* :
Pour quelles valeurs de k le coefficient du binôme de newton $\binom{2k-1}{k}$ est-il impair ?

Solution de Jean-Christophe Laugier : Dressons la table des $\binom{2k-1}{k}$ pour $k = 1, 2, \ldots$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\binom{2k-1}{k}$	**1**	**3**	10	**35**	126	462	1716	**6435**

k	9	10	11	12	13	14	15	16
$\binom{2k-1}{k}$	24310	92378	352716	1352078	5200300	20058300	77558760	**300540195**

Il semble que $\binom{2k-1}{k}$ soit impair si et seulement si k est une puissance de 2. Démontrons-le.

Nous utiliserons les deux résultats suivants [$E(x)$ désigne la partie entière de x] :

Soient x un nombre réel, n et m des entiers positifs alors : $E\left(\dfrac{E\left(\dfrac{x}{m}\right)}{n}\right) = E\left(\dfrac{x}{nm}\right)$.

Soit n un entier positif et p un nombre premier ; la plus haute puissance de p divisant $n!$ a pour exposant :

$$E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + E\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots.$$

On a $\binom{2k-1}{k} = \dfrac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}$. La plus haute puissance de 2 divisant $(2k-1)!$ a pour exposant :

$$E\left(\frac{2k-1}{2}\right) + E\left(\frac{2k-1}{2^2}\right) + E\left(\frac{2k-1}{2^3}\right) + \ldots = k-1 + E\left(\frac{k-1}{2}\right) + E\left(\frac{k-1}{2^2}\right) + E\left(\frac{k-1}{2^3}\right) + \ldots.$$

La plus haute puissance de 2 divisant $k!$ a pour exposant : $E\left(\dfrac{k}{2}\right) + E\left(\dfrac{k}{2^2}\right) + E\left(\dfrac{k}{2^3}\right) + \ldots.$

Et enfin la plus haute puissance de 2 divisant $(k-1)!$ a pour exposant : $E\left(\dfrac{k-1}{2}\right) + E\left(\dfrac{k-1}{2^2}\right) + E\left(\dfrac{k-1}{2^3}\right) + \ldots.$

Il s'ensuit que $\binom{2k-1}{k}$ est un nombre impair si et seulement si : $k-1 = E\left(\dfrac{k}{2}\right) + E\left(\dfrac{k}{2^2}\right) + E\left(\dfrac{k}{2^3}\right) + \ldots$ (1).

* Si k est une puissance de 2, c'est-à-dire $k = 2^p$ ($p \geq 1$), alors : $E\left(\dfrac{k}{2}\right) + E\left(\dfrac{k}{2^2}\right) + E\left(\dfrac{k}{2^3}\right) + \ldots = 2^{p-1} + 2^{p-2} + \ldots + 1 = 2^p - 1 = k - 1$
L'égalité (1) est donc vérifiée et l'est également lorsque $k = 2^0 = 1$.
* Si k n'est pas une puissance de deux, effectuons les divisions successives par 2 permettant d'obtenir le développement binaire de k : $k = 2q_1 + r_0$; $q_1 = 2q_2 + r_1$; $q_2 = 2q_3 + r_2$; … ; $q_n = 2q_{n+1} + r_n$ avec $q_n = 1$, $q_{n+1} = 0$ et $r_n = 1$. L'écriture binaire de k est $r_n r_{n-1} \ldots r_1 r_0$; en ajoutant membre à membre ces $n+1$ égalités, et après simplification, on obtient :

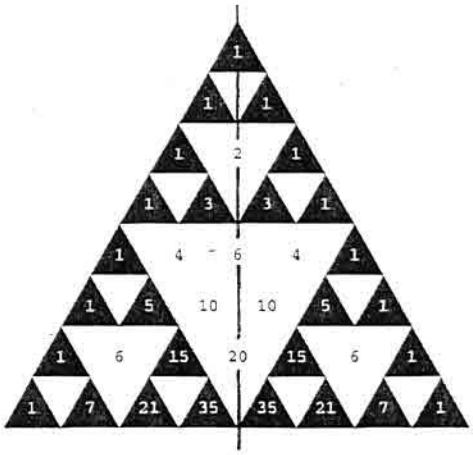
$$k = q_1 + q_2 + \ldots + q_n + r_0 + r_1 + \ldots + r_{n-1} + 1.$$

Puisque $q_i = E\left(\dfrac{k}{2^i}\right)$ et k n'étant pas une puissance de 2, l'un des $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ est égal à 1, il vient :

$$k-1 > E\left(\frac{k}{2}\right)+E\left(\frac{k}{2^2}\right)+E\left(\frac{k}{2^3}\right)+\ldots$$ Et (1) n'est pas vérifié.

Solution de Serge Parpay :

Dans le triangle de Pascal, si l'on colorie en noir les coefficients binomiaux impairs et en blanc les coefficients binomiaux pairs on obtient le crible de Sierpinski ci-contre qui est une figure fractale :



Autour de la médiatrice du triangle, seuls les nombres de la forme $\binom{2^{p+1}-1}{2^p-1}$ et $\binom{2^{p+1}-1}{2^p}$ pour $p = 0, 1, \ldots$ sont impairs. Donc $k = 2^p$ avec $p = 0, 1, \ldots$ est la réponse au problème.
On peut naturellement justifier tout ceci par le calcul.

60-1 *(de Sébastien Peyrot)* :
Quel est le plus petit entier naturel qui, divisé par 10 donne 9 pour reste, divisé par 9 donne 8 pour reste, divisé par 8 donne 7 pour reste, ..., divisé par 2 donne 1 pour reste.

Solution de Caroline Ducos :
Soit n l'entier cherché. Alors n est congru à -1 modulo 10, modulo 9, ..., modulo 2 ce qui équivaut à -1 modulo le PPCM de (10, 9, 8, ..., 2) c'est-à-dire n est congru à -1 modulo 2520. L'entier n vaut donc 2519.
Nous avons reçu une solution semblable de Louis Rivoallan.

Solution de Nathalie Chevalarias :
On cherche le plus petit entier qui divisé par 10 donne 9 pour reste, divisé par 9 donne 8 pour reste, etc. C'est-à-dire qu'on cherche n tel que : $n \equiv 9$ [10] ; $n \equiv 8$ [9] ; $n \equiv 7$ [8] ; $n \equiv 6$ [7] ; $n \equiv 5$ [6] ; $n \equiv 4$ [5] ; $n \equiv 3$ [4] ; $n \equiv 2$ [3] et $n \equiv 1$ [2].
On peut déjà remarquer que si $n \equiv 9$ [10], on a nécessairement $n \equiv 4$ [5] et $n \equiv 1$ [2], que si $n \equiv 7$ [8], on a $n \equiv 3$ [4] et que si $n \equiv 8$ [9], on a $n \equiv 2$ [3].
Il suffit donc de chercher n tel que : $n \equiv 9$ [10] ; $n \equiv 8$ [9] ; $n \equiv 7$ [8] ; $n \equiv 6$ [7] ; $n \equiv 5$ [6].
Or on a alors $n + 1 \equiv 10$ [10] ; $n + 1 \equiv 9$ [9] ; $n + 1 \equiv 8$ [8] ; $n + 1 \equiv 7$ [7] ; $n + 1 \equiv 6$ [6] ; $n + 1$ est donc multiple de $10 = 2 \times 5$, de $9 = 3^2$, de $8 = 2^3$, de 7 et de $6 = 2 \times 3$. La plus petite valeur possible est donc $n + 1 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$ donc $n = 2519$.

Nous publierons dans le prochain Corol'aire les solutions des énoncés **60-2**, **60-3** *et* **60-4** *envoyées par Louis Rivoallan.*