RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Jean-Christophe Laugier de Rochefort nous envoie une démonstration qu'il a élaborée du théorème fondamental de l'arithmétique, peut-être n'est-elle pas inédite, en tout cas je n'en ai pas trouvé trace dans les différents ouvrages à ma disposition (la première démonstration remonte quand même à 1801 dans les Disquisitiones arithmeticae de Gauss), et il souhaite nous la faire partager. Je lui laisse la parole.

Démontrer l'existence de la décomposition d'un entier en produits de facteurs premiers ne présente pas de difficulté particulière. La preuve classique de l'unicité repose sur la proposition fondamentale suivante :
P_1 : Si p premier divise ab, alors p divise a ou p divise b.
P_1 est un corollaire du théorème de Gauss : Si $a \mid bc$ et a premier avec b, alors $a \mid c$. Et pour démontrer le théorème de Gauss, il faut avoir établi la propriété fondamentale du PGCD : $d \mid a$ et $d \mid b \Leftrightarrow d \mid$ PGCD $(a\ ;\ b)$. Voici une démonstration, par l'absurde, de l'unicité de la décomposition d'un entier en produits de facteurs premiers, qui s'affranchit de P_1.
Soit donc n le plus petit entier admettant deux décompositions distinctes : il existe par conséquent deux suites finies croissantes, distinctes, de nombres premiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ $(k, l \geq 1)$ telles que $n = \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_k = \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_l$.
On doit avoir $k > 1$ et $l > 1$. En effet, si par exemple $k = 1$, alors $\alpha_1 = \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_l$ et puisque $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ sont premiers, il en résulte $l = 1$ et $\alpha_1 = \beta_1$ ce qui contredit l'hypothèse que les deux suites $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ sont distinctes.
Supposons à présent $\alpha_1 = \beta_1$; il vient : $n / \alpha_1 = \alpha_2 \ldots \alpha_k = \beta_2 \ldots \beta_l$. On a que n / α_1 est inférieur à n et admet deux décompositions distinctes, ce qui est impossible d'après la définition de n ; par conséquent $\alpha_1 \neq \beta_1$.
Supposons par exemple $\alpha_1 < \beta_1$; il vient alors :
$n - \alpha_1\, \beta_2 \ldots \beta_l = \alpha_1 (\alpha_2 \ldots \alpha_k - \beta_2 \ldots \beta_l)$ (1)
$n - \alpha_1\, \beta_2 \ldots \beta_l = (\beta_1 - \alpha_1)\, \beta_2 \ldots \beta_l$ (2)
Posons $n' = n - \alpha_1\, \beta_2 \ldots \beta_l$; on a $0 < n' < n$. L'égalité (1) montre d'une part que α_1 figure dans une décomposition de n' en produits de facteurs premiers. D'autre part, α_1 est distinct de $\beta_2, \ldots, \beta_l$ et α_1 ne divise pas $\beta_1 - \alpha_1$ car sinon il diviserait β_1 ce qui est impossible. D'après (2), il existe donc une décomposition de n' en produits de facteurs premiers dans laquelle α_1 ne figure pas. L'entier n' admet donc deux décompositions distinctes, ce qui contredit la définition de n. CQFD.

Dans le même esprit, j'en profite pour vous communiquer ce merveilleux petit texte déniché dans le numéro 15 (mai 2001) de « Réciproques », bulletin des professeurs de mathématiques des collèges et lycées de l'académie de Bordeaux (qui a hélas cessé sa parution).

Il y a une vingtaine d'années, Mike Keane célèbre mathématicien américain, me montrait une très jolie démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ qui, bien différente de l'approche classique, ne fait pas appel à la divisibilité. Plusieurs années plus tard nos chemins se croisèrent à nouveau au Chili. « Tu sais, me dit-il, ta démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ me fascine ! Où l'as-tu trouvée ? ». Confirmation que les mathématiciens sont bien souvent distraits (et si c'était moi qui étais dans la lune ???).
Voici donc cette preuve. On observe d'abord que $1 < \sqrt{2} < 2$. En supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel, il existe un entier $q \geq 1$ minimal tel que $q\sqrt{2} \in \mathbf{N}$. Considérons alors le nombre $q' = q\sqrt{2} - q < q$. On remarque que $q'\sqrt{2} = 2q - q\sqrt{2} \in \mathbf{N}$, ce qui est absurde puisque $0 < q' < q$. CQFD (Michel Mendès France - Professeur émérite à l'Université de Bordeaux 1).

✎ Des problèmes

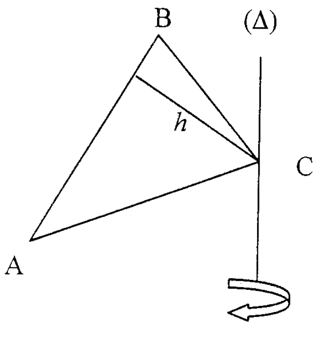
60-1 *de Sébastien Peyrot (Angoulème)* :
Quel est le plus petit entier naturel qui, divisé par 10 donne 9 pour reste, divisé par 9 donne 8 pour reste, divisé par 8 donne 7 pour reste, ..., divisé par 2 donne 1 pour reste ?

60-2 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Quel est le plus petit carré dont l'écriture décimale commence par 2005 ?
(Voilà un énoncé qui pourrait inspirer les participants à la nouvelle formule du Rallye Mathématique Poitou-Charentes.)

60-3
Lors des dernières Journées Nationales de l'APMEP à Orléans, **Francis Jamm** (lycée Lavoisier de Mulhouse) a animé un atelier consacré aux tas de sable ; il a versé du sable sur toutes sortes de surfaces planes découpées dans du carton et notamment sur des quadrilatères convexes. Un participant lui a demandé pour quels quadrilatères convexes on obtenait une pyramide. Sa réponse fut la suivante : « Une condition nécessaire et suffisante est que les bissectrices intérieures soient concourantes, c'est-à-dire que le quadrilatère admette un cercle inscrit ou encore que les sommes des côtés opposés soient égales». **Francis Jamm** a pu justifier le lien entre l'obtention d'une pyramide et le concours des bissectrices en prenant un argument de projection mais il n'a pas eu le temps de nous prouver l'équivalence des trois dernières propositions. Sauriez-vous combler cette lacune ?

60-4

Le 8 décembre dernier au lycée J. Macé de Niort, **Serge Parpay** nous présentait des méthodes élémentaires de calcul d'aires et de volumes. Il a surpris l'assistance en exhibant la formule suivante : $V = Sh/3$ où V désigne le volume engendré par le triangle ABC ci-contre lors de sa rotation autour de l'axe (Δ), S l'aire alors engendrée par le côté [AB] et h la hauteur issue de C. Il a précisé qu'il fallait être « soigneux » pour l'établir. Etes-vous soigneux ?



✎ Des solutions

52-2 *(de Serge Parpay)* :

Soit un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en O. K est l'orthocentre du triangle ADO, H est l'orthocentre du triangle CBO, I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. Montrer que les segments [HK] et [IJ] sont orthogonaux *(ce problème n'a visiblement pas fini d'intéresser).*

Solution de Jean-Christophe Laugier : Voici une autre solution, rapide, utilisant le produit scalaire et les triangles semblables ! On part d'abord de l'égalité $2\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AD}$ démontrée dans la solution proposée par L. Rivoallan. Il s'agit donc de prouver que $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AD}$. Soient B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC).

On a, d'une part : $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'H}).(\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{B'H}.\overrightarrow{D'D} = OB'.AD' - B'H.DD'$

et, d'autre part : $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'K}).(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C}) = \overrightarrow{OD'}.\overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{D'K}.\overrightarrow{BB'} = D'K.BB' - OD'.B'C$

Les triangles $AD'K$ et $BB'O$ sont semblables (les angles aigus $K\hat{A}D'$ et $B'\hat{B}O$ sont à côtés perpendiculaires et donc égaux) d'où $AD'/BB' = D'K/B'O$ soit $AD'.B'O = BB'.D'K$ (1). De même, la similitude des triangles $OD'D$ et $HB'C$ permet d'écrire : $OD'/HB' = D'D/B'C$ soit $OD'.B'C = HB'.D'D$ (2).

Il résulte de (1) et (2) que $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OK}\overrightarrow{BC}$. CQFD.

56-5 *(de Serge Parpay)* :

En 1594, le mathématicien belge Adrien Romain soumet à « tous les mathématiciens du monde entier » l'équation suivante : *Suit une monstrueuse équation du quarante-cinquième degré. Des informations peuvent être trouvées à propos de cette équation dans un article de Pour La Science (novembre 2003) que Jean-Paul Delahaye a consacré au mathématicien Viète. A vos archives...*

57-2 *(de Frédéric de Ligt)* :

Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour peindre le disque unité fermé de telle sorte que deux quelconques de ses points, séparés par une distance unité, ne reçoivent pas la même couleur ?

Solution : Si l'on étend au plan tout entier, il s'agit d'un célèbre problème non résolu à ce jour dont on sait seulement que la valeur minimale du nombre de couleurs peut-être 4, 5, 6 ou 7 (voir l'article de Jean-Paul Delahaye dans *Pour La Science* de février 2005, p.88). La figure 1 montre que dans le disque unité fermé, il faut au moins 4 couleurs pour respecter les contraintes données (raisonner par l'absurde avec trois couleurs et constater que G et D porteraient la même couleur alors que GD= 1). La figure 2 donne un coloriage avec 5 couleurs. Le centre du disque unité est le centre du triangle de Reuleaux ABC de diamètre unité. Le triangle D'E'F' est équilatéral et (D'A), (E'B) et (F'C) sont concourantes au centre du disque.

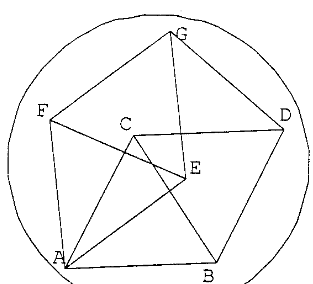


fig.1

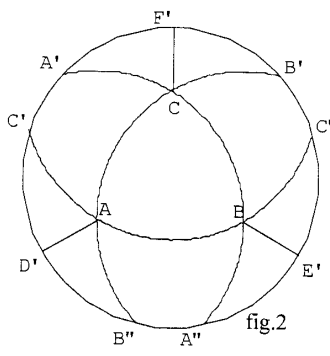


fig.2

1	ABC
2	ABA''B'' - A'F'C – AB'' – AB – CF' – A''B'' – A'F' – B'' – F' – A
3	ACA'C' – BC''E' – A'C – BE' – AC – A'C' – C''E' – A' – E' – C
4	CB'C''B – D'AB'' – D'A – BC'' – CB – D'B'' – B'C'' – D' – C'' – B
5	A''BE' – AD'C' – B'CF' – D'C' – F'B' – A''E' – AC' – CB' – A''B – A'' – C' – B'

Le coloriage de la figure 2 est indiqué par le tableau ci-dessus ; on convient qu'une lettre seule représente un point, deux lettres accolées représentent un arc de cercle ouvert ou un segment ouvert et trois ou quatre lettres accolées représentent une surface ouverte. On numérote les couleurs de 1 à 5. Il n'y a donc plus que deux valeurs possibles pour le nombre minimal de couleurs à utiliser : 4 ou 5. Qui tranchera entre ces deux valeurs ?

58-1 *(de Jacques Drouglazet)* :
On donne les suites numériques u, v, w définies par $u_0 = 1$; $v_0 = \sqrt{2}$; $w_0 = 2$; $u_{n+1} = | v_n - u_n |$; $v_{n+1} = | w_n - v_n |$; $w_{n+1} = | u_n - w_n |$ pour tout entier naturel n. On considère alors l'ensemble $E_n = \{ u_n ; v_n ; w_n \}$. Donner l'expression de l'ensemble E_n en fonction de n. Montrer que cet ensemble a pour limite l'ensemble $\{ 0 ; 0 ; 0 \}$ quand n augmente indéfiniment. Reprendre l'exercice en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{3}$.

Solution de Jacques Drouglazet : On étudie les suites x, y, z définies par $x_0 = 1$; $x_1 = 2$ et $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$; $y_0 = 1$; $y_1 = 3$ et $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$; $z_0 = 2$; $z_1 = 4$ et $z_{n+2} = 2z_{n+1} + z_n$. En fait $z_n = 2x_n$, mais en introduisant z on obtient une notation plus symétrique. On commence par démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n / x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n / y_n = \sqrt{2}$ puis que $|x_n\sqrt{2} - y_n| = (-1)^n(x_n\sqrt{2} - y_n)$ et enfin que $|z_n - y_n\sqrt{2}| = (-1)^n(z_n - y_n\sqrt{2})$. On démontre alors par récurrence que :

a) pour $n = 2k$ ($k \geq 1$) on a $E_n = \{ (-1)^k(x_k\sqrt{2} - y_k) ; (-1)^k(y_{k-1}\sqrt{2} - z_{k-1}) ; (-1)^k(y_{k-1} - x_{k-1}\sqrt{2}) \}$
b) pour $n = 2k + 1$ on a $E_n = \{ (-1)^k(x_k\sqrt{2} - y_k) ; (-1)^k(z_k - y_k\sqrt{2}) ; (-1)^k(y_{k-1} - x_{k-1}\sqrt{2}) \}$.

On démontre ensuite que les trois nombres qui composent E_n tendent vers 0 quand n augmente indéfiniment.
Pour la seconde question on étudie les suites x, y, z, u définies par $x_0 = 1$; $x_1 = 2$ et $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$; $y_0 = 1$; $y_1 = 5$ et $y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n$; $z_0 = 0$; $z_1 = 1$ et $z_{n+2} = 4z_{n+1} - z_n$; $u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$. On commence par démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n / u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n / z_n = \sqrt{3}$ puis que pour tout $n \geq 1$: $x_n - z_n\sqrt{3} > 0$ et $-y_n + u_n\sqrt{3} > 0$. On démontre alors par récurrence que :

a) pour $n = 3k$ ($k \geq 1$) on a $E_n = \{ x_k - z_k\sqrt{3} ; \sqrt{3}(x_k - z_k\sqrt{3}) ; -y_k + u_k\sqrt{3} \}$
b) pour $n = 3k + 1$ on a $E_n = \{ -y_k + u_k\sqrt{3} ; x_{k+1} - z_{k+1}\sqrt{3} ; x_k - z_k\sqrt{3} \}$
c) pour $n = 3k + 2$ on a $E_n = \{ x_{k+1} - z_{k+1}\sqrt{3} ; -y_k + u_k\sqrt{3} ; \sqrt{3}(x_{k+1} - z_{k+1}\sqrt{3}) \}$.

On démontre ensuite que les trois nombres qui composent E_n tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment.

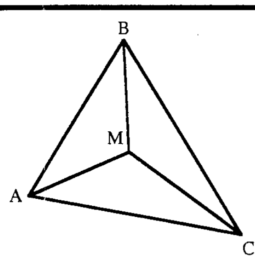
59-5 *(de Louis Rivoallan)* :
On considère les nombres à n chiffres (en base dix) tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. On accepte que contrairement à l'usage, les chiffres « de gauche » soient égaux à 0. Il y a à l'évidence deux nombres qui répondent à la question : 0 et 1, que l'on fait précéder de $(n - 1)$ zéros avec la convention précédente. Montrer, que pour tout n, il y a 2 autres nombres écrits avec n chiffres qui répondent à la condition.

Solution de Marcel Fournier (Saintes) :
On appelle X un nombre vérifiant la propriété souhaitée. Alors dire que X et X^2 se terminent par les mêmes n chiffres revient à dire que $(X^2 - X)$ se termine par n zéros, donc que ce nombre $X^2 - X$ est divisible par 10^n. $X^2 - X = X(X - 1)$ est donc divisible par $2^n \times 5^n$. On cherche des solutions autres que $X = 0$ et $X = 1$. Les deux entiers consécutifs X et $X - 1$ sont premiers entre eux ainsi que 2^n et 5^n. Par conséquent, pour que le produit $X(X - 1)$ soit divisible par le produit $2^n \times 5^n$, il faut chercher deux entiers consécutifs X et $X - 1$ tels que l'un soit multiple de 2^n et l'autre multiple de 5^n. Pour $n = 2$, on obtient $X - 1 = 24$ et $X = 25$ ou $X - 1 = 75$ et $X = 76$; les solutions sont alors 25 et 76. Pour $n = 3$, on obtient les nombres 0625 (attention) et 9376.

Cas général :
a) On cherche un nombre X multiple de 5^n tel que $X - 1$ soit un multiple de 2^n. Or le théorème de Bezout appliqué aux nombres 2^n et 5^n premiers entre eux nous permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs a et b tels que $a \times 5^n + b \times 2^n = 1$; alors en posant $X = a \times 5^n$, on aura bien X multiple de 5^n et $X - 1$ multiple de 2^n. Il faut alors montrer l'existence et l'unicité d'une telle solution entre 1 et 10^n. On cherche les entiers a' et b' vérifiant $a' \times 5^n + b' \times 2^n = 1 = a \times 5^n + b \times 2^n$, donc $(a' - a) \times 5^n = (b - b') \times 2^n$ et d'après le théorème de Gauss, on obtient $a' - a$ multiple de 2^n (2^n est premier avec 5^n, donc il divise $a' - a$) ; $a' - a = k \times 2^n$ (k entier relatif) d'où a' est de la forme $a' = a + k \times 2^n$; les nombres cherchés X sont alors de la forme $X = (a + k \times 2^n) \times 5^n$, donc $X = a \times 5^n + k \times 10^n$, ce qui prouve que deux solutions « consécutives » diffèrent de 10^n. Il y a donc un nombre X et un seul à n chiffres (commençant éventuellement par des zéros) multiple de 5^n avec $X - 1$ multiple de 2^n.
b) On cherche maintenant un nombre X tel que $X - 1$ soit multiple de 5^n et X multiple de 2^n. Il existe deux entiers relatifs c et d tels que $c \times 5^n + d \times 2^n = -1$. En raisonnant comme au a) on démontre l'existence et l'unicité d'un nombre compris entre 1 et 10^n de la forme $Y = c \times 5^n$ tel que $Y + 1$ soit multiple de 2^n. Le nombre cherché est alors $X = Y + 1$ (X est multiple de 2^n et $X - 1$ est multiple de 5^n).

Défi-Collège

Cette rubrique voudrait proposer des petits problèmes qui peuvent être résolus avec les outils disponibles au collège. Corol'aire se fera un plaisir de publier les solutions des élèves, mais aussi celles des professeurs qui prendront certainement du plaisir à les résoudre. N'hésitez pas à prendre la plume pour alimenter cette rubrique en donnant des solutions, en proposant des problèmes ou en nous racontant le déroulement d'une séance de recherche de l'un de ces problèmes avec les élèves. Jean Fromentin



Soit un triangle ABC et un point M intérieur au triangle. Où placer ce point M pour que les aires des triangles MAB, MAC et MBC soient proportionnelles respectivement aux longueurs des côtés [AB], [AC] et [BC] ?