Edito

2008 :
Poitiers ou La Rochelle ?
La Rochelle ou Poitiers ?

À la Toussaint 2008, les Journées nationales de l'APMEP se tiendront en Poitou-Charentes. Le principe en a été adopté à notre assemblée générale du 8 décembre 2004 à Niort. Depuis lors, le comité régional travaille sur deux hypothèses : Poitiers ou La Rochelle.

Le site de Poitiers a des avantages, notamment le palais des congrès du Futuroscope avec la faculté des sciences et le LPI à proximité. Rappelons que Poitiers a déjà accueilli les Journées en 1982 et en 1993.

Mais La Rochelle a aussi des atouts : la ville a une bonne image, susceptible d'attirer les congressistes, elle a, elle aussi, un palais des congrès à proximité de la faculté des sciences, et une bonne infrastructure hôtelière. Des contacts sont déjà pris avec la faculté des sciences.

Mais pour que nous puissions nous engager sur La Rochelle, il faudrait qu'une équipe locale suffisamment solide accepte de s'investir dans ce projet. Étant entendu que c'est l'affaire de toute la Régionale, et qu'un certain nombre de tâches (recherche des conférenciers, organisation des ateliers, gestion des inscriptions...) ne nécessitent pas une présence sur place.

C'est pourquoi je lance un appel à tous les collègues de la région : seriez-vous prêts à donner un coup de main pour la réalisation de ce projet ? Plus nous serons nombreux, moins lourde sera la tâche de chacun.

Vous pouvez vous signaler en envoyant un message sur apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr

Et je demande plus spécialement aux collègues de La Rochelle et de la Charente-Maritime de réserver l'après-midi du mercredi 15 juin au lycée Vieljeux à La Rochelle, de 15 h à 17 h, pour que nous puissions faire l'état de nos forces sur place, et voir ensemble la faisabilité des Journées à La Rochelle.

À vos marques, prêts ? Partons !

Louis-Marie BONNEVAL

SOMMAIRE

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

APMEP

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

n°60

Mars 2005

Dispensé de timbrage | Poitiers Centre de tri

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

P PRESSE DISTRIBUE PAR LA POSTE

DÉPOSÉ LE 29/03/05

APMEP : http://irem.univ-poitiers.fr/apmep
Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Le numéro : 1 € .
Abonnement 1 an (4 numéros) : 3,5 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur	Louis-Marie BONNEVAL
Comité de rédaction	C. BLOCH, S. PARPAY, J. FROMENTIN, F. DE LIGT
Imprimerie	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Editeur	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P.	n° 73 802
Dépôt légal	Mars 2005

Vie de l'Association

Compte rendu du Comité régional du 9 mars 2005

Présents : M. Marot, D. Gaud, LM. Bonneval, J. Citron, JS Priou, J. Germain, C. Kirch, M. Parent, S. Peyrot, Y. Noël, J. Chayé, J. Fromentin, J. Souville.

Excusés : S. Parpay, C. Gobin, C. Ducos, F. De Ligt.

1°) Corol'aire : Articles avant le 15 mars pour une sortie début avril.

2°) Rallye : 25 établissements se sont inscrits cette année. On note une participation plus importante en lycée qu'en collège. Avec 65 classes inscrites, la participation est conforme à celle de l'année dernière.

3°) Expo Cube : « Les panneaux de l'expo sont achevés, il ne reste plus qu'à les plastifier » dixit F. De Ligt. Une première présentation en sera faite lors de la journée de stage animée par S. Peyrot à Saintes le 8 avril 2005. Par la suite et jusqu'à la fin de l'année scolaire, l'expo restera dans la région d'Angoulême, où elle sera à disposition des établissements qui le désirent. L-M. Bonneval propose qu'en septembre 2005, l'APMEP organise un calendrier de disponibilité par région. Nous vous en tiendrons informés ultérieurement. De plus, F. De Ligt propose de réactualiser le livret d'accompagnement de cette exposition. J. Fromentin rappelle qu'il reste plus de 200 exemplaires de la première édition (Ludimath 4). Nous décidons de les mettre en vente pour la modique somme de 3 € l'unité. (Avis aux amateurs, le contenu du livret est toujours d'actualité !)

4°) Brochures : L-M. Bonneval propose de commander au National les brochures manquantes, afin que l'APMEP en possède un plus grand nombre en double. J. Chayé accepte d'être responsable des brochures (tenue à jour du stock, présentation lors des conférences ...).
Des collègues retraités proposent de faire don à l'association de leur collection de « Bulletins verts ». Nous convenons ensemble de confectionner des rayonnages afin de les stocker dans les locaux de l'association.

5°) Journées Nationales 2008 : Il reviendra à notre Régionale de les organiser. Dans un premier temps, nous devons décider du lieu de la manifestation. Nous hésitons entre Poitiers et la Rochelle. Ces deux villes ont des structures d'accueil équivalentes et suffisantes (nous prévoyons d'accueillir mille personnes). La Rochelle nous paraît plus attractif et nous proposons d'y déplacer le comité le 15 juin, afin de nous faire une idée plus précise des locaux mais aussi pour rencontrer les collègues intéressés par l'organisation de ces « Journées ». Il faut prendre assez rapidement une décision quant à la localisation de la manifestation. Nous prendrons donc notre décision lors du comité de septembre 2005.

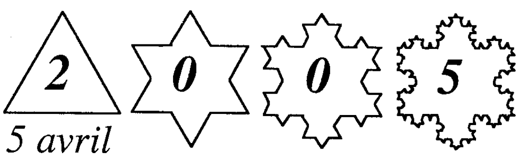
6°) et 7°) Conférences : La conférence de M. Blay est reportée en octobre 2005, sans plus de précision pour le moment. Nous prévoyons tout de même de l'organiser à Angoulême.
Nous envisageons aussi le report de la conférence « Math en jeans » du 4 mai au 25 mai, suivant les disponibilités de L. Pecquet. Cette conférence se tiendra à Poitiers au Lycée du Bois d'Amour.

8°) Lycée : Bac S et ES : les exercices étoilés (problèmes ouverts) des "annales zéro" sont très déstabilisants, de même que les ROC (restitution organisée de connaissances). Cette nouvelle organisation du bac semble perturber certains collègues, et il apparaît difficile de bien préparer les élèves pour cette épreuve.
Projets de programme de Terminale STG et Terminale L spécialité : ils sont en consultation dans les Académies jusqu'à fin mars.

9°) Préparation du comité national : Marie Parent présente l'ordre du jour du prochain comité national (12-13 mars), notamment EVAPM 1^{e}S et 6^{e} .

L-M. Bonneval clôt le comité à 16 h 10, laissant place au débat sur le thème « repenser l'école ? ». J-S. Priou

Rallye Mathématique Poitou-Charentes



Les établissements qui participent au Rallye Mathématique Poitou-Charentes ont dû recevoir dans un premier temps un accusé de réception de leur inscription et, récemment, le matériel habituel du rallye : une lettre adressée aux « surveillants » de l'épreuve, les consignes de passation et quatre exemplaires par classe de l'épreuve. En cas de problème, téléphonez à l'IREM de Poitiers. Marie-Claude Linard, secrétaire de l'IREM, vous faxera l'épreuve ou vous mettra en relation avec un membre de l'équipe du Rallye.
L'équipe se réunira le 27 avril pour établir le palmarès. Les établissements devraient donc recevoir les résultats mi-mai.
60 classes participent cette année au rallye : 36 dans 12 lycées et 24 dans 13 collèges. On assiste, comme les années précédentes, à une bonne participation des lycées et à une plus que modeste participation des collèges. Ne serait-ce pas là un indicateur sérieux du malaise qui règne dans les collèges ? J-F

Repenser l'école

En mai 2003, nous sommes allées comme représentantes au comité national de l'APMEP au séminaire annuel organisé par notre association. Une vague de mécontentement agitait alors le monde de l'éducation, nous étions souvent d'accord avec les constats réalisés et certaines revendications mais nous n'entendions pas assez de propositions volontaristes pour donner de nouvelles perspectives à l'école. Nous avons donc passé tout le chemin de retour à parler de ce que pourrait être son devenir. Plusieurs idées s'imposaient à nous mais des avis extérieurs nous manquaient. Nous avons donc proposé à quelques collègues (mais néanmoins amies), de différentes matières (français, histoire et une « hors éducation nationale ») de nous réunir autour d'un bon café pour connaître leur avis sur nos « propositions ». Après deux rencontres, une trame s'est dessinée et nous vous la soumettons (conscientes de ne pas avoir de propositions claires sur la partie lycée). Pour engager le débat, voici deux textes, l'un sur les raisons du changement l'autre sur les propositions de changement, quels que soient vos avis sur la question, nous serions ravies de recueillir vos différentes remarques.

À bientôt.

Cyrille Kirsch et Marie Parent.

Des constats et des pistes de réponse à propos de l'organisation scolaire

La superposition des missions de l'école :

L'école se veut un lieu d'éducation et propose des sensibilisations à la santé, l'hygiène, la sécurité, la découverte des milieux professionnels etc. et ces moments se réalisent toujours sur des plages horaires disciplinaires.

Dissocier les temps de rencontres extérieures avec les temps d'apprentissage disciplinaire.

L'ambiguïté du travail personnel :

Nous, en tant qu'enseignants, on intègre le temps de travail personnel dans l'apprentissage des nouvelles notions et trop souvent on constate que ce travail personnel est superficiel et peu important.

Intégrer le travail personnel des élèves au temps scolaire

Le sentiment qu'il y a peu d'espace de liberté pour les élèves et les enseignants :

Créer des temps choisis pour vivre des projets en commun et approfondir des domaines spécifiques.

Ces trois réflexions nous ont amenées à repenser l'organisation scolaire. On a par contre voulu maintenir un principe à nos yeux essentiel celui d'un lieu unique et de temps commun à **tous** les élèves au moins au collège.

Et si on changeait l'organisation des collèges et lycées ...

L'enseignement serait composé de cycles (obligatoires) :

- Le 1er cycle regrouperait les classes actuelles de 6ème et 5ème ;
- Le 2nd cycle regrouperait les classes actuelles de 4ème et 3ème ;
- Le 3ème cycle correspondrait aux classes de lycée.

Nous sommes parties de l'idée d'augmenter le temps de présence des élèves dans les établissements (32 heures par semaine), voilà un peu le détail de nos propositions :

1er Cycle :

Il comporterait trois temps hebdomadaires :

- Des enseignements disciplinaires (mathématiques, français, histoire-géographie, EPS, arts, langue, SVT, physique, techno/informatique) communs à tous les élèves qui représenteraient 22 heures au total où les exigences et les contenus seraient revus dans toutes les disciplines afin d'obtenir des bases indispensables à chaque niveau.
- Des projets semestriels multidisciplinaires sur 2 heures.
- Un bloc de 3 heures par quinzaine réservé aux activités extra - scolaires (cinéma, sensibilisations diverses...)

+ 1 heure de vie au collège
+ 1 heure quinzaine réservée au CDI
+ 5 heures d'études dirigées sous la surveillance des enseignants.

2ème Cycle :

La structure de ce cycle reste voisine de celle proposée au 1er cycle mais...

- Les enseignements disciplinaires ne représenteraient plus que 20 heures.
- Les projets multidisciplinaires seraient remplacés par le choix de deux options de 2 heures (2nde langue ou deux matières du tronc commun) ou une seule option de 4 heures « découverte du milieu professionnel » (au moins trois découvertes différentes dans l'année).

Le reste est maintenu.

3ème Cycle :

Pas de proposition très concrète pour le moment, on aimerait bien garder l'idée d'un temps d'enseignement commun quel que soit l'établissement choisi (enseignement général ou professionnel) et celle du choix de spécialités mais faut-il le faire dès la seconde, faut-il leur laisser la possibilité de modifier leurs choix ? Ces questions ne sont pas tranchées... Nous pourrons en débattre ensemble.

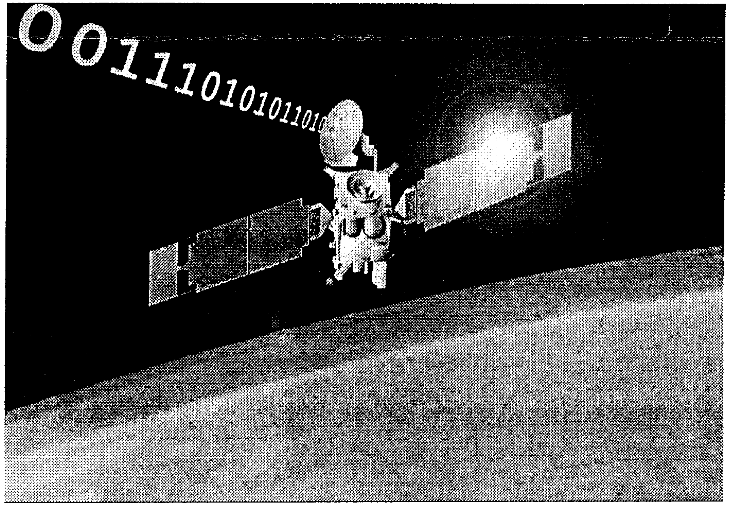
Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l'Enseignement
Public

Lancelot PECQUET

Lancelot PECQUET est Maître de conférence
à l'Université de Poitiers.
Il enseigne au département d'Informatique
et mène ses recherches
au Laboratoire de Mathématiques (UMR CNRS 6086).

La Régionale A.P.M,E.P.
de Poitou-Charentes
vous invite à participer
à la conférence.

Codages
&
MATh en JEANS



POUR AFFICHAGE

POITIERS
le mercredi 25 mai
à 14h30
au lycée du Bois d'Amour

Dans cet exposé, je présenterai l'expérience que nous avons menée avec une équipe de 8 professeurs de mathématiques de trois établissements de la région Poitou-Charentes :

- Lycée St-Joseph de Bressuire (Deux-Sèvres, 79);

- Lycée de l'Image et du Son d'Angoulême (Charente, 16);

- Lycée du Bois d'Amour de Poitiers (Vienne, 86);

pour faire travailler 23 volontaires de leurs élèves sur divers aspects mathématiques du codage (codage de source, codage optimal de canal, codage linéaire de canal) et certains problèmes ouverts de recherche sur ces sujets. La démarche est celle des ateliers MATh en JEANS: une Méthode d'Apprentissage des Théories mathématiques en Jumelant des Établissements pour une Approche Nouvelle des Savoirs.

MATh JEANS

A.P.M.E.P. , I.R.E.M. Faculté des Sciences, 40, Avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS Cedex.

Vie à l'IREM

La période de Janvier à Mars est très chargée en stages qu'il faut donc préparer et animer. Mais les groupes IREM de réflexion approfondie se sont néanmoins réunis :

Le 7 Janvier : Histoire des Mathématiques sur la théorie des proportions dans le livre V d'Euclide et son utilisation dans les livres suivants. Il faut faire un réel effort pour abandonner notre vision actuelle du nombre, et comprendre comment les Grecs ont introduit et travaillé la notion de rapports de grandeurs. Or ce livre V a été au moins jusqu'au 18e siècle la référence où il fallait revenir dès qu'une difficulté se présentait.

Le 4 Février : La journée didactique a notamment débuté par un vaste débat qui a donné lieu à la rédaction du texte qui suit.

Le 25 Mars prochain, de 14h à 17h, réunion à l'IREM de l'atelier de Culture Scientifique (voir Corol'aire de Septembre dernier) avec au programme deux exposés :

À 14h, Nicolas Minet[1] *:* Présentation d'un travail commun entre maths et physique sur le thème de la musique
À 15h30, Jean Claude Thiénard : Autour du paradoxe de Bertrand
Le groupe est ouvert ; ceux qui souhaitent le rejoindre seront les bienvenus.

Jean SOUVILLE, directeur de l'IREM.

1. Nicolas Minet est professeur de mathématiques au LPI (lycée du Futuroscope).

Sur le discrédit des Mathématiques *(Groupe didactique, IREM de Poitiers, 4 février 2005)*

Claude Allègre a écrit qu'il suffisait de peu de connaissances en mathématiques pour faire des sciences. S'il se permettait de dire cela, c'est que c'était dans l'air du temps. Malheureusement, ces propos nous les entendons de plus en plus et ils portent avec eux des conséquences désastreuses... Il apparaît ainsi, tout naturellement, un faisceau de faits qui met en cause l'importance de l'enseignement des mathématiques, voire sa légitimité.

Le débat sur la place des mathématiques dans l'enseignement n'est pas nouveau. Il a commencé à être explicitement posé lors de la grande réforme de 1902 qui a donné à l'enseignement des sciences une place équivalente à celle de l'enseignement des lettres. Le débat sur les mathématiques à enseigner et sur les méthodes pour les enseigner n'est lui non plus pas nouveau : au XVIIIe Clairaut et Legendre avaient des vues opposées sur la question. Pour l'un, la géométrie doit être enseignée en partant des problématiques posées par les divers champs d'application que sont l'arpentage, la topographie... Pour l'autre, la géométrie reste celle exposée dans Euclide, enrichie des apports de la géométrie analytique. Borel en 1902 militait pour la création d'ateliers de mathématiques, manifestant ainsi un désir de lier le premier enseignement des mathématiques à une connaissance expérimentale. Mathématiser à partir de résultats de mesures semblait le mot d'ordre. Lors de la réforme de 1970, dite des maths modernes, ce point de vue était devenu étranger.

Dans un texte intitulé : « Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques ? » (conférence à l'IUFM de Metz, le 8 octobre 2003, colloque : "l'enseignement des mathématiques du collège au premier cycle universitaire"), Yves Chevallard fait une analyse de ce problème. Il y rappelle que l'enseignement des mathématiques, dans les dernières décades, allait, somme toute, de soi et qu'il n'y avait pas de question à se poser ; seulement des interrogations sociétales nouvelles sont apparues, et, selon Chevallard, notre enseignement doit, pour survivre, s'articuler autour de celles-ci.

Nous sommes dans un moment de crise et la question de la légitimité de l'enseignement des mathématiques est posée au niveau politique. Cela nous oblige, nous enseignants de mathématiques, à nous interroger sur nos pratiques.
Mettons en lumière quelques problèmes auxquels nous sommes confrontés :

Tout d'abord, pour faire des études, il fallait souvent faire des mathématiques sans que l'intérêt de cette obligation soit perçu, ce qui a conduit à voir notre discipline comme un pur outil de sélection. L'effet est qu'une mauvaise représentation des mathématiques s'est installée dans la population (même parfois chez les futurs enseignants). C'est le reflet d'un vécu. Avoir voulu trop longtemps faire des mathématiques une discipline d'ascension sociale, et, par la même occasion, une discipline de sélection, fait que certains parents attaquent ce qu'ils ont mal vécu, et répercutent parfois une angoisse sur leurs enfants. Les mathématiques, ascenseur social, cela semble révolu. Leur enseignement en est d'autant plus discrédité.

Pour une majorité de personnes, les mathématiques n'ont pas d'histoire, ne sont pas vues comme une science vivante en pleine évolution, sans cesse sollicitée pour résoudre des problèmes d'ingénierie, de calculs et de mise en place de techniques opératoires dans les domaines les plus divers, de prévision, d'aide à la décision... Bien entendu, il y a aussi la résolution de problèmes de nature interne, qui débouche sur une meilleure compréhension des concepts en jeu, de leurs limites, de la manière de les dépasser et sur plus d'efficacité ! Mais quel paradoxe entre la fonction primordiale des mathématiques dans pratiquement tous les domaines de l'activité humaine et leur discrédit dans le grand public !

Et puis il y a la périlleuse question : « Faire des mathématiques, c'est quoi ? ». Nous sommes, selon certains, partis dans un enseignement insensé où les techniques répétées sont bien souvent vides de sens. Le mimétisme, la reproduction ont remplacé le pourquoi et le comment de l'enseignement. Les mathématiques enseignées paraissant vides de sens, une situation de crise ne peut qu'apparaître. Peut-on encore longtemps faire des mathématiques sans savoir pourquoi ? Est-ce au professeur de mathématiques de sortir de son enseignement traditionnel pour montrer les champs d'implication de cette discipline ? Est ce qu'une interdisciplinarité bien pensée peut résoudre le problème ?

Enfin, il y a le rôle de l'école en général. Au XIX^{e} siècle, apprendre était synonyme d'école. Aujourd'hui l'école n'est plus le seul lieu du savoir, de la connaissance, de la culture. En est-il encore le lieu privilégié ? Certainement pour ce qui est des savoirs qui demandent un apprentissage méthodique, systématique et cumulatif. Pour le reste, les médias et Internet sont aussi là pour ça. Il faut peut-être réaffirmer, redémontrer le rôle irremplaçable des savoirs à apprentissages cumulatifs dans la structuration des esprits, dans le développement de la capacité à apprendre de façon efficiente des savoirs et savoir faire nouveaux.

Face à toutes ces questions, on peut commencer à apporter une base de réflexion. Tout n'est pas si noir, et l'horizon n'est pas bouché.

La première partie de la réflexion porte sur ce qu'on attend des mathématiques. Qu'en est-il de l'utilité des maths ? Le mot « utilité » draine une consonance utilitaire ; ce n'est pas ce que nous recherchons. Il faut éviter justement de tomber dans le travers de la marchandisation du savoir. Le problème n'est peut-être pas de disserter sur l'utilité des mathématiques mais plutôt de redonner sens à cet enseignement... Le menuisier n'a sûrement pas besoin du théorème de Pythagore pour construire son armoire et, le plus souvent lorsqu'il en a besoin, il met en place des procédures propres à son corps de métier. Faire des mathématiques, c'est tout d'abord bâtir des modèles intellectuels utiles à la compréhension du monde physique, économique, technique, dans lequel nous vivons, sur lequel nous agissons et transformons tous les jours. C'est peut-être cela qu'il faut bien expliciter.

Il faut tout de même rappeler que c'est à travers des problématiques qui sont ancrées dans la vie sociale et pratique que se sont développées les mathématiques. L'arpentage avait sa place dans un manuel de mathématiques en 1880. Il ne l'a plus. Le citoyen n'est (presque) plus un propriétaire terrien qui doit évaluer l'aire de ses terrains. On a pourtant toujours besoin de méthode pour calculer des aires. Il faut prendre en compte les évolutions de la société. Est-on amené à calculer une aire ? Un volume ? Oui et cette utilité doit se retrouver quelque part. C'est donc dans cette direction que les premiers éléments de réponse doivent être apportés : si les mathématiques servent à comprendre le monde et à y vivre, cela doit se sentir à travers notre enseignement. Dans le fond, c'est l'ossature même de l'enseignement des mathématiques qui est à revoir. C'est un point difficile. Ce n'est pas tant le contenu qui est à renouveler, mais la manière d'y conduire par des problématiques adéquates

On peut ensuite mener une réflexion sur ce qu'on entend par faire des mathématiques.

Les mathématiques sont une discipline particulière, avec son mode de pensée, ses règles. Ainsi, argumenter en français n'a pas le même sens qu'argumenter en mathématiques. Plus les arguments seront nombreux en français, meilleure, plus complète sera la réponse à la question posée, alors qu'en mathématiques, si l'on demande d'argumenter sur le fait que telle figure est un rectangle, on n'attend pas le catalogue des propriétés qui permettent de justifier que c'en est un mais au contraire, souvent une seule, la mieux adaptée. Il faut retrouver les moyens de montrer l'efficacité intellectuelle de cette discipline. Les mathématiques sont le lieu où se rencontrent contraintes et liberté, où s'exerce l'art du discernement et de la concision. Cette dialectique peut constituer un axe de travail.

Un autre axe peut être fourni par une expérience que tout enseignant de mathématiques a pu faire : La problématisation développée pour l'introduction d'une notion est motivante pour les élèves et change leur comportement. Re-problématiser l'enseignement des mathématiques est un autre axe de travail

Chevallard, quant à lui, suggère de mettre en place des parcours d'étude et de recherche - notés P.E.R. - qui seraient des activités à mi-chemin entre les TPE et des situations plus réelles. Par exemple, en fin de collège, la mesure des distances inaccessibles, qui permettrait un travail sur l'ensemble de l'année, dans les domaines géométrique et numérique (y compris grands nombres, puissances de dix). C'est partir d'une problématique générale qui conduit à mathématisation et à utilisation d'outils dont l'apprentissage de la maîtrise s'impose alors à tous.

Enfin la prise en compte de l'évolution de la société et des outils qu'elle met à notre disposition doit conduire à revoir les pratiques enseignantes et certains contenus : dans ce cadre, une réflexion sur des usages pertinents et les apports des outils de calcul formels (lesquels seront bientôt à la portée de tous) sont de nature à réorienter bien des points de notre enseignement.

L'école doit mettre en place des éléments pour comprendre le monde. Les mathématiques, comme toutes les sciences, ont la particularité de construire un rapport particulier au monde et c'est à nous de montrer qu'elles sont encore efficaces pour remplir ce rôle. Ce n'est pas quand je paie le pain chez la boulangère que les mathématiques m'aident à construire ce savoir. Il faut retrouver ce qui fait la spécificité des mathématiques : résoudre des problèmes, dont certains ne sont mathématiques qu'après avoir été pensés mathématiquement.

Cherchons où réside la spécificité des mathématiques aujourd'hui. Une étude épistémologique est à mener sur notre enseignement, ainsi qu'une réflexion sur les transferts des connaissances et savoir-faire mathématiques, sur les lieux et les objets de ces transferts, sur leur modalité enfin. C'est au prix d'une telle réflexion et des changements qu'elle ne manquera pas de produire dans la pratique enseignante que le problème de la légitimité de l'enseignement des mathématiques ne se posera plus dans les termes actuels.

Perles dans nos copies

Cinquième. Un rectangle a trois angles droits et le plus souvent les quatre comme celui-ci.

Seconde. Le triangle AIB ayant l'angle $\widehat{AIB}$ droit et pour côté opposé le diamètre, ce triangle est donc circoncit.

Première. Enoncé : on donne la répartition d'une population par âge et par sexe. On choisit au hasard une personne dans cette population. On veut représenter cette épreuve par un tirage dans une urne : comment constituer cette urne ?

Réponse : Je mets dans l'urne 892 boules de jeunes hommes, 686 boules de jeunes femmes, 2102 boules de vieux hommes et 1852 boules de vieilles femmes.

RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Jean-Christophe Laugier de Rochefort nous envoie une démonstration qu'il a élaborée du théorème fondamental de l'arithmétique, peut-être n'est-elle pas inédite, en tout cas je n'en ai pas trouvé trace dans les différents ouvrages à ma disposition (la première démonstration remonte quand même à 1801 dans les Disquisitiones arithmeticae de Gauss), et il souhaite nous la faire partager. Je lui laisse la parole.

Démontrer l'existence de la décomposition d'un entier en produits de facteurs premiers ne présente pas de difficulté particulière. La preuve classique de l'unicité repose sur la proposition fondamentale suivante :
P_1 : Si p premier divise ab, alors p divise a ou p divise b.
P_1 est un corollaire du théorème de Gauss : Si $a \mid bc$ et a premier avec b, alors $a \mid c$. Et pour démontrer le théorème de Gauss, il faut avoir établi la propriété fondamentale du PGCD : $d \mid a$ et $d \mid b \Leftrightarrow d \mid$ PGCD $(a\ ;\ b)$. Voici une démonstration, par l'absurde, de l'unicité de la décomposition d'un entier en produits de facteurs premiers, qui s'affranchit de P_1.
Soit donc n le plus petit entier admettant deux décompositions distinctes : il existe par conséquent deux suites finies croissantes, <u>distinctes</u>, de nombres premiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ $(k, l \geq 1)$ telles que $n = \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_k = \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_l$.
On doit avoir $k > 1$ et $l > 1$. En effet, si par exemple $k = 1$, alors $\alpha_1 = \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_l$ et puisque $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ sont premiers, il en résulte $l = 1$ et $\alpha_1 = \beta_1$ ce qui contredit l'hypothèse que les deux suites $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ sont distinctes.
Supposons à présent $\alpha_1 = \beta_1$; il vient : $n / \alpha_1 = \alpha_2 \ldots \alpha_k = \beta_2 \ldots \beta_l$. On a que n / α_1 est inférieur à n et admet deux décompositions distinctes, ce qui est impossible d'après la définition de n ; par conséquent $\alpha_1 \neq \beta_1$.
Supposons par exemple $\alpha_1 < \beta_1$; il vient alors :
$n - \alpha_1\, \beta_2 \ldots \beta_l = \alpha_1 (\alpha_2 \ldots \alpha_k - \beta_2 \ldots \beta_l)$ (1)
$n - \alpha_1\, \beta_2 \ldots \beta_l = (\beta_1 - \alpha_1)\, \beta_2 \ldots \beta_l$ (2)
Posons $n' = n - \alpha_1\, \beta_2 \ldots \beta_l$; on a $0 < n' < n$. L'égalité (1) montre d'une part que α_1 figure dans une décomposition de n' en produits de facteurs premiers. D'autre part, α_1 est distinct de $\beta_2, \ldots, \beta_l$ et α_1 ne divise pas $\beta_1 - \alpha_1$ car sinon il diviserait β_1 ce qui est impossible. D'après (2), il existe donc une décomposition de n' en produits de facteurs premiers dans laquelle α_1 ne figure pas. L'entier n' admet donc deux décompositions distinctes, ce qui contredit la définition de n. CQFD.

Dans le même esprit, j'en profite pour vous communiquer ce merveilleux petit texte déniché dans le numéro 15 (mai 2001) de « Réciproques », bulletin des professeurs de mathématiques des collèges et lycées de l'académie de Bordeaux (qui a hélas cessé sa parution).

Il y a une vingtaine d'années, Mike Keane célèbre mathématicien américain, me montrait une très jolie démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ qui, bien différente de l'approche classique, ne fait pas appel à la divisibilité. Plusieurs années plus tard nos chemins se croisèrent à nouveau au Chili. « Tu sais, me dit-il, ta démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ me fascine ! Où l'as-tu trouvée ? ». Confirmation que les mathématiciens sont bien souvent distraits (et si c'était moi qui étais dans la lune ???).
Voici donc cette preuve. On observe d'abord que $1 < \sqrt{2} < 2$. En supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel, il existe un entier $q \geq 1$ minimal tel que $q\sqrt{2} \in \mathbf{N}$. Considérons alors le nombre $q' = q\sqrt{2} - q < q$. On remarque que $q'\sqrt{2} = 2q - q\sqrt{2} \in \mathbf{N}$, ce qui est absurde puisque $0 < q' < q$. CQFD (Michel Mendès France - Professeur émérite à l'Université de Bordeaux 1).

Des problèmes

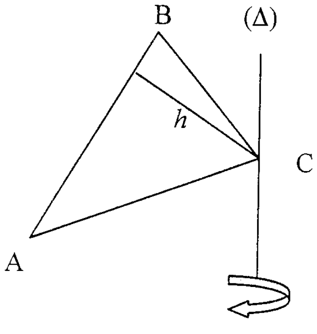
60-1 *de Sébastien Peyrot (Angoulème)* :
Quel est le plus petit entier naturel qui, divisé par 10 donne 9 pour reste, divisé par 9 donne 8 pour reste, divisé par 8 donne 7 pour reste, ..., divisé par 2 donne 1 pour reste ?

60-2 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :
Quel est le plus petit carré dont l'écriture décimale commence par 2005 ?
(Voilà un énoncé qui pourrait inspirer les participants à la nouvelle formule du Rallye Mathématique Poitou-Charentes.)

60-3
Lors des dernières Journées Nationales de l'APMEP à Orléans, **Francis Jamm** (lycée Lavoisier de Mulhouse) a animé un atelier consacré aux tas de sable ; il a versé du sable sur toutes sortes de surfaces planes découpées dans du carton et notamment sur des quadrilatères convexes. Un participant lui a demandé pour quels quadrilatères convexes on obtenait une pyramide. Sa réponse fut la suivante : « Une condition nécessaire et suffisante est que les bissectrices intérieures soient concourantes, c'est-à-dire que le quadrilatère admette un cercle inscrit ou encore que les sommes des côtés opposés soient égales». **Francis Jamm** a pu justifier le lien entre l'obtention d'une pyramide et le concours des bissectrices en prenant un argument de projection mais il n'a pas eu le temps de nous prouver l'équivalence des trois dernières propositions. Sauriez-vous combler cette lacune ?

60-4

Le 8 décembre dernier au lycée J. Macé de Niort, **Serge Parpay** nous présentait des méthodes élémentaires de calcul d'aires et de volumes. Il a surpris l'assistance en exhibant la formule suivante : $V = Sh/3$ où V désigne le volume engendré par le triangle ABC ci-contre lors de sa rotation autour de l'axe (Δ), S l'aire alors engendrée par le côté [AB] et h la hauteur issue de C. Il a précisé qu'il fallait être « soigneux » pour l'établir. Etes-vous soigneux ?



Des solutions

52-2 *(de Serge Parpay)* :
Soit un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en O. K est l'orthocentre du triangle ADO, H est l'orthocentre du triangle CBO, I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. Montrer que les segments [HK] et [IJ] sont orthogonaux *(ce problème n'a visiblement pas fini d'intéresser).*

Solution de Jean-Christophe Laugier : Voici une autre solution, rapide, utilisant le produit scalaire et les triangles semblables ! On part d'abord de l'égalité $2\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AD}$ démontrée dans la solution proposée par L. Rivoallan. Il s'agit donc de prouver que $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AD}$. Soient B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (AC).

On a, d'une part : $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'H}).(\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{OB'}.\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{B'H}.\overrightarrow{D'D} = OB'.AD' - B'H.DD'$

et, d'autre part : $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'K}).(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C}) = \overrightarrow{OD'}.\overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{D'K}.\overrightarrow{BB'} = D'K.BB' - OD'.B'C$

Les triangles $AD'K$ et $BB'O$ sont semblables (les angles aigus $K\hat{A}D'$ et $B'\hat{B}O$ sont à côtés perpendiculaires et donc égaux) d'où $AD'/BB' = D'K/B'O$ soit $AD'.B'O = BB'.D'K$ (1). De même, la similitude des triangles $OD'D$ et $HB'C$ permet d'écrire : $OD'/HB' = D'D/B'C$ soit $OD'.B'C = HB'.D'D$ (2).

Il résulte de (1) et (2) que $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OK}\overrightarrow{BC}$. CQFD.

56-5 *(de Serge Parpay)* :
En 1594, le mathématicien belge Adrien Romain soumet à « tous les mathématiciens du monde entier » l'équation suivante : *Suit une monstrueuse équation du quarante-cinquième degré. Des informations peuvent être trouvées à propos de cette équation dans un article de Pour La Science (novembre 2003) que Jean-Paul Delahaye a consacré au mathématicien Viète. A vos archives...*

57-2 *(de Frédéric de Ligt)* :
Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour peindre le disque unité fermé de telle sorte que deux quelconques de ses points, séparés par une distance unité, ne reçoivent pas la même couleur ?

Solution : Si l'on étend au plan tout entier, il s'agit d'un célèbre problème non résolu à ce jour dont on sait seulement que la valeur minimale du nombre de couleurs peut-être 4, 5, 6 ou 7 (voir l'article de Jean-Paul Delahaye dans *Pour La Science* de février 2005, p.88). La figure 1 montre que dans le disque unité fermé, il faut au moins 4 couleurs pour respecter les contraintes données (raisonner par l'absurde avec trois couleurs et constater que G et D porteraient la même couleur alors que GD= 1). La figure 2 donne un coloriage avec 5 couleurs. Le centre du disque unité est le centre du triangle de Reuleaux ABC de diamètre unité. Le triangle D'E'F' est équilatéral et (D'A), (E'B) et (F'C) sont concourantes au centre du disque.

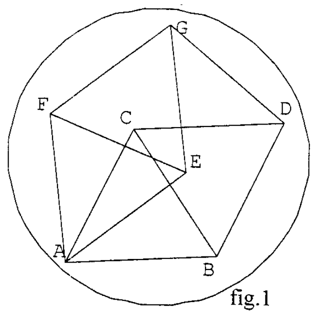


fig.1

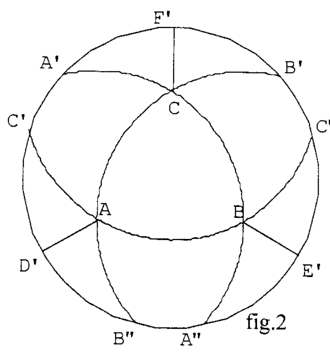


fig.2

1	ABC
2	ABA''B'' - A'F'C – AB'' – AB – CF' – A''B'' – A'F' – B'' – F' – A
3	ACA'C' – BC''E' – A'C – BE' – AC – A'C' – C''E' – A' – E' – C
4	CB'C''B – D'AB'' – D'A – BC'' – CB – D'B'' – B'C'' – D' – C'' – B
5	A''BE' – AD'C' – B'CF' – D'C' – F'B' – A''E' – AC' – CB' – A''B – A'' – C' – B'

Le coloriage de la figure 2 est indiqué par le tableau ci-dessus ; on convient qu'une lettre seule représente un point, deux lettres accolées représentent un arc de cercle ouvert ou un segment ouvert et trois ou quatre lettres accolées représentent une surface ouverte. On numérote les couleurs de 1 à 5. Il n'y a donc plus que deux valeurs possibles pour le nombre minimal de couleurs à utiliser : 4 ou 5. Qui tranchera entre ces deux valeurs ?

58-1 *(de Jacques Drouglazet)* :
On donne les suites numériques u, v, w définies par $u_0 = 1$; $v_0 = \sqrt{2}$; $w_0 = 2$; $u_{n+1} = | v_n - u_n |$; $v_{n+1} = | w_n - v_n |$; $w_{n+1} = | u_n - w_n |$ pour tout entier naturel n. On considère alors l'ensemble $E_n = \{ u_n ; v_n ; w_n \}$. Donner l'expression de l'ensemble E_n en fonction de n. Montrer que cet ensemble a pour limite l'ensemble $\{ 0 ; 0 ; 0 \}$ quand n augmente indéfiniment. Reprendre l'exercice en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{3}$.

Solution de Jacques Drouglazet : On étudie les suites x, y, z définies par $x_0 = 1$; $x_1 = 2$ et $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$; $y_0 = 1$; $y_1 = 3$ et $y_{n+2} = 2 y_{n+1} + y_n$; $z_0 = 2$; $z_1 = 4$ et $z_{n+2} = 2 z_{n+1} + z_n$. En fait $z_n = 2x_n$, mais en introduisant z on obtient une notation plus symétrique. On commence par démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n / x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n / y_n = \sqrt{2}$ puis que $|x_n\sqrt{2} - y_n| = (-1)^n(x_n\sqrt{2} - y_n)$ et enfin que $|z_n - y_n\sqrt{2}| = (-1)^n(z_n - y_n\sqrt{2})$. On démontre alors par récurrence que :

a) pour $n = 2k$ ($k \geq 1$) on a $E_n = \{ (-1)^k(x_k\sqrt{2} - y_k) ; (-1)^k(y_{k-1}\sqrt{2} - z_{k-1}) ; (-1)^k(y_{k-1} - x_{k-1}\sqrt{2}) \}$

b) pour $n = 2k + 1$ on a $E_n = \{ (-1)^k(x_k\sqrt{2} - y_k) ; (-1)^k(z_k - y_k\sqrt{2}) ; (-1)^k(y_{k-1} - x_{k-1}\sqrt{2}) \}$.

On démontre ensuite que les trois nombres qui composent E_n tendent vers 0 quand n augmente indéfiniment.
Pour la seconde question on étudie les suites x, y, z, u définies par $x_0 = 1$; $x_1 = 2$ et $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$; $y_0 = 1$; $y_1 = 5$ et $y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n$; $z_0 = 0$; $z_1 = 1$ et $z_{n+2} = 4 z_{n+1} - z_n$; $u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$. On commence par démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n / u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n / z_n = \sqrt{3}$ puis que pour tout $n \geq 1$: $x_n - z_n\sqrt{3} > 0$ et $-y_n + u_n\sqrt{3} > 0$. On démontre alors par récurrence que :

a) pour $n = 3k$ ($k \geq 1$) on a $E_n = \{ x_k - z_k\sqrt{3} ; \sqrt{3}(x_k - z_k\sqrt{3}) ; -y_k + u_k\sqrt{3} \}$

b) pour $n = 3k + 1$ on a $E_n = \{ -y_k + u_k\sqrt{3} ; x_{k+1} - z_{k+1}\sqrt{3} ; x_k - z_k\sqrt{3} \}$

c) pour $n = 3k + 2$ on a $E_n = \{ x_{k+1} - z_{k+1}\sqrt{3} ; -y_k + u_k\sqrt{3} ; \sqrt{3}(x_{k+1} - z_{k+1}\sqrt{3}) \}$.

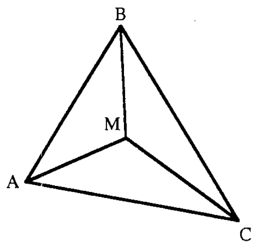
On démontre ensuite que les trois nombres qui composent E_n tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment.

59-5 *(de Louis Rivoallan)* :
On considère les nombres à n chiffres (en base dix) tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. On accepte que contrairement à l'usage, les chiffres « de gauche » soient égaux à 0. Il y a à l'évidence deux nombres qui répondent à la question : 0 et 1, que l'on fait précéder de $(n - 1)$ zéros avec la convention précédente. Montrer, que pour tout n, il y a 2 autres nombres écrits avec n chiffres qui répondent à la condition.

Solution de Marcel Fournier (Saintes) :
On appelle X un nombre vérifiant la propriété souhaitée. Alors dire que X et X^2 se terminent par les mêmes n chiffres revient à dire que $(X^2 - X)$ se termine par n zéros, donc que ce nombre $X^2 - X$ est divisible par 10^n. $X^2 - X = X(X - 1)$ est donc divisible par $2^n \times 5^n$. On cherche des solutions autres que X = 0 et X = 1. Les deux entiers consécutifs X et X – 1 sont premiers entre eux ainsi que 2^n et 5^n . Par conséquent, pour que le produit X(X – 1) soit divisible par le produit $2^n \times 5^n$, il faut chercher deux entiers consécutifs X et X – 1 tels que l'un soit multiple de 2^n et l'autre multiple de 5^n . Pour $n = 2$, on obtient X – 1 = 24 et X = 25 ou X – 1 = 75 et X = 76 ; les solutions sont alors 25 et 76. Pour $n = 3$, on obtient les nombres 0625 (attention) et 9376.
<u>Cas général</u> :
a) On cherche un nombre X multiple de 5^n tel que X – 1 soit un multiple de 2^n. Or le théorème de Bezout appliqué aux nombres 2^n et 5^n premiers entre eux nous permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs a et b tels que $a \times 5^n + b \times 2^n = 1$; alors en posant $X = a \times 5^n$, on aura bien X multiple de 5^n et X – 1 multiple de 2^n . Il faut alors montrer l'existence et l'unicité d'une telle solution entre 1 et 10^n. On cherche les entiers a' et b' vérifiant $a' \times 5^n + b' \times 2^n = 1 = a \times 5^n + b \times 2^n$, donc $(a' - a) \times 5^n = (b - b') \times 2^n$ et d'après le théorème de Gauss, on obtient $a' - a$ multiple de 2^n (2^n est premier avec 5^n , donc il divise $a' - a$) ; $a' - a = k \times 2^n$ (k entier relatif) d'où a' est de la forme $a' = a + k \times 2^n$; les nombres cherchés X sont alors de la forme $X = (a + k \times 2^n) \times 5^n$, donc $X = a \times 5^n + k \times 10^n$, ce qui prouve que deux solutions « consécutives » diffèrent de 10^n . Il y a donc un nombre X et un seul à n chiffres (commençant éventuellement par des zéros) multiple de 5^n avec X – 1 multiple de 2^n .
b) On cherche maintenant un nombre X tel que X – 1 soit multiple de 5^n et X multiple de 2^n . Il existe deux entiers relatifs c et d tels que $c \times 5^n + d \times 2^n = -1$. En raisonnant comme au a) on démontre l'existence et l'unicité d'un nombre compris entre 1 et 10^n de la forme $Y = c \times 5^n$ tel que Y + 1 soit multiple de 2^n . Le nombre cherché est alors X = Y + 1 (X est multiple de 2^n et X – 1 est multiple de 5^n).

Défi-Collège

Cette rubrique voudrait proposer des petits problèmes qui peuvent être résolus avec les outils disponibles au collège. Corol'aire se fera un plaisir de publier les solutions des élèves, mais aussi celles des professeurs qui prendront certainement du plaisir à les résoudre. N'hésitez pas à prendre la plume pour alimenter cette rubrique en donnant des solutions, en proposant des problèmes ou en nous racontant le déroulement d'une séance de recherche de l'un de ces problèmes avec les élèves. Jean Fromentin



Soit un triangle ABC et un point M intérieur au triangle. Où placer ce point M pour que les aires des triangles MAB, MAC et MBC soient proportionnelles respectivement aux longueurs des côtés [AB], [AC] et [BC] ?