RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous. *Frédéric de Ligt*

Pour commencer, voici ce qui pourrait s'appeler "une recherche de narration" autour d'un gentil problème de niveau collège. J'espère qu'elle vous amusera. Si vous désirez en proposer, la rubrique est à vous...

Mise en boîte.

Dans une librairie poussiéreuse du vieux Paris, Molotov, un vieil anarchiste farfelu reconverti dans la vente d'ouvrages subversifs, s'active sur un coin de table à d'étranges découpages dans du papier carton. Entre Charles - Edouard, jeune homme en rupture de ban qui s'est lié d'amitié avec Molotov.

C-E. — Bonjour camarade !

(Molotov ne l'a pas entendu. C.E. s'approche doucement. Surpris, Molotov sursaute.)

MOLOTOV. — Tu m'as fait peur à entrer comme un espion !

C-E. — Je vous ai dit bonjour. Mais vous ne m'avez pas répondu tant vous étiez absorbé par votre travail.

MOLOTOV. — Tiens, prends une chaise. Je vais t'expliquer le projet qui m'occupe. Tout d'abord, sais-tu ce qu'est un patron pour un pavé ?

C-E. — Bien entendu. C'est la cible idéale.

MOLOTOV. — Non, non ! La passion t'égare. Je suis en train de te parler de géométrie.

C-E, *étonné*. — De géométrie ?... Alors dans ce cas, si mes souvenirs sont exacts, c'est un dessin, constitué par les faces de ce pavé, qui permet de le construire après découpage et pliage.

MOLOTOV, *excité*. — C'est ça ! Eh bien, je me suis dit que si un jour nous voulions préparer la révolution, il nous faudrait disposer de pavés. Quelle allure aurait une révolution sans pavé ? Personne ne nous prendrait au sérieux. Mais il ne faudrait pas non plus que nous blessions quelqu'un puisque nous prônons la non-violence. Et la solution, je l'ai trouvée. Il suffit de les bâtir en carton !

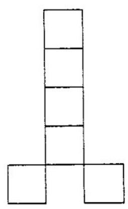
C-E. — En carton ?

MOLOTOV, *toujours excité*. — En carton ! Et je suis même allé plus loin. Comme le mouvement est pauvre, il va falloir économiser le carton. L'étude des différents patrons permettrait de choisir ceux qui remplissent le mieux un carré. On peut rêver au grand soir et avoir l'esprit pratique, non ?

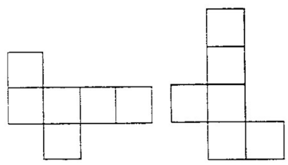
C.E, *perplexe*. — J'ai du mal à vous suivre, Molotov. Vous êtes déconcertant.

MOLOTOV. — Ce matin je n'avais guère de clients. J'ai donc commencé par étudier les différents patrons du pavé droit à faces carrées.

Il y a bien eu quelques ratés comme celui-ci :



et quelques doubles comme celui-là :



Enfin je crois être parvenu à tous les obtenir. Tu m'as trouvé tout à l'heure alors que je m'essayais à les agencer dans un carré.

C.E. — Ce que vous appelez un pavé droit à faces carrées, n'est-ce pas ce que l'on nomme communément un cube ?

MOLOTOV, *énervé*. — Un cube ! Un cube ! Mais ce sont les enfants qui s'amusent avec des cubes. Moi, je suis un anarchiste. D'ailleurs, si tu étais aussi un véritable révolutionnaire, tu m'aiderais déjà au lieu de bavarder sans cesse !

C.E, *vexé*. — Avez-vous une autre paire de ciseaux, Molotov ?

Question: Trouver les différents patrons du cube. Combien, au maximum, peut-on dessiner de patrons d'un cube, d'arête 10 cm, dans un carré de côté 1 m ?

Le texte suivant est tiré d'un des livres de chevet de Léa Broutille, « Les femmes dans la science » A. Rehière, 1897. Etes-vous en accord avec tout ce qui est dit ?

Le tétraèdre régulier.

« Le tétraèdre régulier est de tous les solides le plus pauvre en faces, angles et arêtes, et celui qui, sous un développement donné de surface, contient le moins de substance.

Malgré cette pauvreté, ou plutôt à cause de cette pauvreté, il déconcerte l'œil, qui a peine à s'en rendre compte. Son aspect a quelque chose de menaçant. De quelque côté qu'on l'aborde, on le trouve armé d'angles aigus et d'arêtes tranchantes. Placé dans la position qui lui est propre, droit sur une arête, il ne peut s'y soutenir seul et il tombe. Sur quelque face qu'on le pose, la largeur de la base se trouvant toujours égale à la hauteur du sommet, il s'établit largement, prend ses aises, pour ainsi dire ; mais c'est un aplomb grossier et une aisance sans grâce.

Ses faces sont égales et semblables ; ses arêtes égales et semblables ; ses angles égaux et semblables.

Et avec cela rien n'est d'accord : tout se coupe, se heurte, se contrecarre. Faces et lignes ne se correspondent que dans leur mutuelle et réciproque hostilité. Le tétraèdre, pauvre de fond, tranchant de forme, exclusivement réduit à lui-même, représente la plus exiguë, la plus étroite individualité.
D'une monotonie qui fatigue, d'une âpreté qui désole, c'est l'embryon le plus élémentaire, le plus borné de le stricte nature. »

Mme Marie PAPE-CARPENTIER (1815-1878)

Des problèmes

59-1 *de Serge Parpay (Niort)* : Des maquettes de polyèdres peuvent être réalisées avec des éléments en plastique encastrables l'un dans l'autre (en particulier ceux des Editions Soral) : par exemple un tétraèdre, un cube, le polyèdre de la figure (1) (deux pentagones réguliers et dix triangles équilatéraux).

fig.1

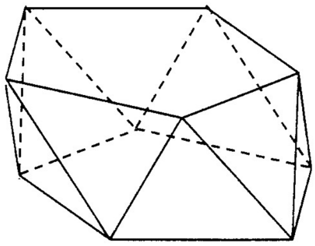
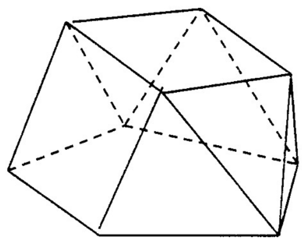


fig.2



Au cours d'une réunion de la Régionale APMEP de Poitiers, **Claude Marcy** nous a montré un polyèdre constitué d'un pentagone régulier, deux carrés et sept triangles équilatéraux - ce polyèdre a été construit par des élèves de **Nicolas Minet** lors d'une étude de polyèdres réguliers. D'une forme semblable au polyèdre de la figure (2), l'assemblage est difficile à réaliser : il faut forcer sur les pièces pour les encastrer et elles ne sont pas très jointives. Il y a donc un problème que nos collègues vous proposent d'élucider.

59-2 *de Claude Marcy (Chatellerault)* : Pour quelles valeurs de k le coefficient du binôme de Newton $\binom{2k-1}{k}$ est-il impair ?

59-3 *de Daniel Daviaud (Jonzac)* : Vous participez à un jeu où l'on vous propose le choix entre trois coffres fermés. L'un des coffres est rempli d'or et les deux autres sont vides. Vous choisissez, disons, le coffre 1 ; l'animateur, qui sait où se trouve l'or, ouvre un autre coffre, vide bien sûr. Il vous donne maintenant la possibilité de vous en tenir à votre choix initial (coffre 1) ou de choisir l'autre coffre. Qu'avez-vous intérêt à faire ?

59-4 *de Louis Rivoallan (La Rochelle)* : Le dessin d'un quadrilatère convexe et de ses deux diagonales fait apparaître quatre triangles. Les centres de gravité, les centres des cercles circonscrits ou les orthocentres de ces triangles sont à chaque fois les sommets d'un parallélogramme.

59-5 *de Louis Rivoallan (La Rochelle)* : On considère les nombres à n chiffres (en base dix) tels que leur carré se termine par les mêmes n chiffres. On accepte que contrairement à l'usage, les chiffres "de gauche" soient égaux à 0. Il y a à l'évidence deux nombres qui répondent à la question : 0 et 1, que l'on fait précéder de $(n - 1)$ zéros avec la convention précédente. Montrer, que pour tout n, il y a exactement 2 autres nombres écrits avec n chiffres qui répondent à cette condition.
L'idée est venue d'un collègue de l'IUFM de La Rochelle qui a cherché à généraliser un exercice posé au concours de recrutement des professeurs des écoles.

Des solutions

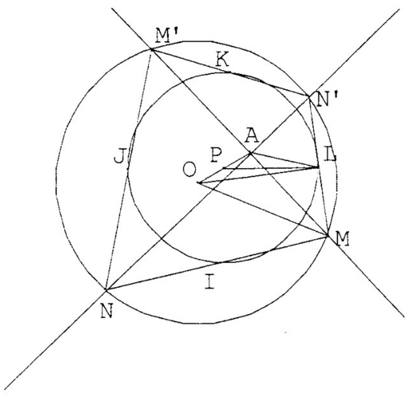
56-1 *(de Stéphane Saint-Jean)* :
Quel est le comportement de la suite de terme général $\sin((1 + \sqrt{2})^n o)$ quand n croit indéfiniment ?

Correctif à la solution donnée par Daniel Daviaud dans le corol'aire n° 57 : "...et donc que $a_n + b_n\sqrt{2}$ équivaut à $a_n + \sqrt{2}a_n / \sqrt{2} = 2a_n$. Autrement dit : $(1 + \sqrt{2})^n$ est de plus en plus proche d'un entier pair, si bien que $(1 + \sqrt{2})^n$ s'approche de 0, modulo 2."
Louis Rivoallan fait remarquer à juste titre que ce raisonnement avec des équivalents est incorrect. En effet $a_n + b_n\sqrt{2}$ équivaut à $2a_n$ n'entraîne nullement que $a_n + b_n\sqrt{2}$ s'approche de $2a_n$ mais seulement qu'ils sont du même ordre de grandeur. Cela ne remet pas en cause le calcul matriciel qui aboutit à $a_n = (\alpha + \beta)/2$ et $b_n = (\alpha/\sqrt{2} - \beta)/2$ où $\alpha = (1 + \sqrt{2})^n$ et $\beta = (1 - \sqrt{2})^n$ mais il faut ensuite s'intéresser à la différence $a_n + \sqrt{2}b_n - 2a_n$ qui vaut $-\beta(1 + \sqrt{2})/2$ et qui tend vers 0 quand n croît, alors on peut conclure.

56-3 *(de Frédéric de Ligt)* :
Parmi les entiers de 1 à 200, j'ai tiré 101 nombres au hasard et j'ai constaté que pour deux de ces nombres l'un divisait l'autre. Est-ce un hasard ?

Solution : Ceci est toujours le cas. Tout entier n peut s'écrire de façon unique sous la forme $2^r q$ avec q entier impair et r entier naturel. L'application de l'ensemble $\{1, 2, 3,..., 200\}$ dans l'ensemble $\{1, 3, 5,..., 199\}$ qui à n associe q est une surjection. Le cardinal de son image vaut 100. Si l'on choisit 101 nombres parmi les entiers de 1 à 200, il s'en trouvera toujours deux parmi ceux-ci qui auront la même image. Notons $2^r q$ et $2^{r'} q$ deux éléments qui ont la même image et supposons que $r' < r$ alors $2^{r'} q$ divise $2^r q$.

56-4 *(de Jacques Chayé)* :
Un point A est fixé à l'intérieur d'un cercle. Deux droites perpendiculaires pivotent autour de A ; la première coupe le cercle en M et M', la seconde en N et N'. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [MN], [NM'], [M'N'] et [N'M]. Démontrer que I, J, K et L décrivent un même cercle.



Solution : Dans le triangle rectangle AMN' on a l'égalité AL = ML (comme rayons du cercle circonscrit à ce triangle).
Dans le triangle rectangle OLM, avec O centre du cercle circonscrit au quadrilatère MNM'N', on a $OL^2 + LM^2 = OM^2 = r^2$ où r désigne le rayon du cercle circonscrit à ce quadrilatère ; et donc $OL^2 + AL^2 = r^2$.
Notons P le milieu du segment [OA]. D'après le théorème du carré de la médiane dans le triangle AOL : $AL^2 + OL^2 = 2AP^2 + 2PL^2$.

Donc $r^2 = 2AP^2 + 2PL^2$. Et finalement $LP^2 = (r^2 - 2AP^2)/2$. Ainsi LP est une longueur constante. Par conséquent L décrit le cercle de centre P et de rayon $(r^2 - 2AP^2)/2$. Pour les mêmes raisons les points I, J, et K parcourent ce cercle.

57-1 *(de Sébastien Peyrot)* :
Déterminer l'ensemble des points P du plan complexe de coordonnées (a ; b) tel que les racines du polynôme $X^2 - 2(2 + i)X + a + bi = 0$ aient le même module.

Solution : Notons $re^{i\theta}$ et $re^{i\theta'}$ deux nombres complexes de même module. Si ce sont les racines d'un polynôme unitaire du second degré à coefficients complexes, ce polynôme prend la forme $X^2 - r(e^{i\theta} + e^{i\theta'})X + r^2e^{i(\theta + \theta')}$. On peut aussi l'écrire :
$X^2 - 2re^{i(\theta + \theta')/2}\cos[(\theta - \theta')/2]X + (re^{i(\theta + \theta')/2})^2$
Par identification avec le polynôme $X^2 - 2(2 + i)X + a + bi$ on a les équations :
$2 + i = re^{i(\theta + \theta')/2}\cos[(\theta - \theta')/2]$ et $a + bi = (re^{i(\theta + \theta')/2})^2$
Clairement, à cause de la première équation, $(\theta - \theta')/2$ ne peut valoir $\pi/2 + k\pi$ avec k dans $\mathbf{Z}$. Pour une valeur donnée α de $(\theta - \theta')/2$ différente de $\pi/2 + k\pi$, on trouve au moins un triplet $(r ; \theta ; \theta')$ solution de l'équation $(2 + i)/\cos\alpha = re^{i(\theta + \theta')/2}$
Dès lors $a + ib = [(2 + i)/\cos\alpha]^2 = (3 + 4i)/\cos^2\alpha$. Quand α décrit $\mathbf{R} - \{ \pi/2 + k\pi \ / \ k \in \mathbf{Z} \}$, $\cos^2\alpha$ décrit $]0 ; 1]$ et l'ensemble cherché est l'ensemble des points de coordonnées $(x ; 4x/3)$ où $x \geq 3$. Il s'agit d'une demi-droite d'origine le point de coordonnées (3 ; 4).