

Édito

Nostalgie

Un ouvrier qui fait des dépenses quotidiennes de tabac, eau-de-vie, boisson ne s'aperçoit pas qu'il gaspille ainsi 143 francs par an. Combien cela représente-t-il de journées de sa femme qui est brodeuse et gagne 2,75 franc par jour ?

En cette rentrée 2004, l'école d'autrefois est à la mode. Le Monde du 15/9/04 cite plusieurs livres récents qui témoignent de cet engouement. À la télévision, « Le pensionnat de Chavagnes » rencontre un large succès.

Le ministre de l'éducation saisit l'occasion pour recommander « les exercices traditionnels qui ont fait la preuve de leur efficacité ». Allons-nous remettre la blouse grise pour traiter les problèmes de trains et de robinets ?

Les historiens de l'éducation savent bien combien cette vision idyllique du passé est illusoire. Tout comme l'appel au « retour aux vraies valeurs » telles que le « rétablissement de l'autorité des maîtres ». On sait qu'à toutes les époques depuis l'Antiquité égyptienne on trouve de tels appels. Cela traduit une inquiétude qui peut être fondée, mais dont la solution ne peut être le retour en arrière. D'ailleurs celui-ci est tout simplement impossible : le monde change à toute allure, l'école doit continuer à évoluer.

C'est dans cette perspective que la commission Thélot a travaillé. Au moment où j'écris ce texte, son rapport n'est pas encore public, mais on en connaît les grandes lignes. À l'école et au collège, il parle d'un socle commun, constitué de ce qui est « fondamental et indispensable », où figurent principalement le français et les mathématiques. Il affirme que la maîtrise de ce socle commun va de pair avec la diversification des voies de réussite. Il évoque aussi d'autres sujets importants : la formation des enseignants, le travail en équipe, l'accompagnement scolaire, le service des enseignants ...

Des mots tout cela ? Pas seulement, puisque ce rapport devrait déboucher sur une loi d'orientation. Il devrait donc y avoir encore un débat public, dans lequel l'APMEP s'efforcera de se faire entendre.

Mais en fin de compte ces mesures seront ce que les enseignants en feront. Or dans les années qui viennent une forte proportion d'entre eux va partir à la retraite, ce qui va rajeunir la profession. À ce propos, je me réjouis de voir des collègues trentenaires investir l'APMEP, les IREM, les IUFM. Pour l'enseignement des mathématiques, c'est en effet dans ces structures que, s'appuyant sur l'expérience du passé, on construit l'avenir.

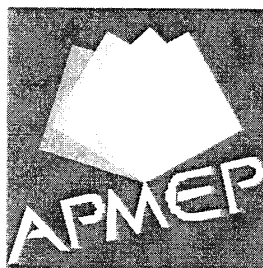
À condition que les jeunes veuillent bien écouter les anciens !

Louis-Marie BONNEVAL

SOMMAIRE

Édito	p. 1
Tribune libre : Des programmes trop lourds	p. 2
Informations diverses	p. 2
La vie de l'IREM de Poitiers	p. 3 et 4
Rallye Mathématique Poitou-Charentes	p. 5 et 6
Rubricol'age	p. 7 à 9
Conférence : La dyscalculie	p. 10

Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l'Enseignement
Public



Régionale de
Poitou-Charentes

n° 58

Septembre 2004

Dispensé de timbrage Poitiers Centre de tri

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX



PRESSE
DISTRIBUÉ PAR

LA POSTE

DÉPOSÉ LE 27/09/2004

APMEP : <http://irem.univ-poitiers.fr/apmep>
Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Le numéro : 1 Euro .

Abonnement 1 an (4 numéros) : 3,5 Euros.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur	Louis-Marie BONNEVAL
Comité de rédaction	Colette BLOCH, Frédéric de LIGT, Serge PARPAY, Jean FROMENTIN.
Imprimerie	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Editeur	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P.	n° 73 802
Dépôt légal	Septembre 2004

Tribune libre : *Des programmes trop lourds*

Voici la lettre que Raymond Barra a envoyé à Michel Frechet, Président de l'APMEP à propos de la lourdeur des programmes actuels. L'APMEP considère effectivement que les programmes sont en général trop chargés par rapport aux horaires, ce qui rend difficile l'apprentissage des mathématiques. Mais il faut signaler que les horaires ont été fortement réduits de la Sixième à la Terminale : il faut déjà revenir à des horaires suffisants. Par ailleurs, des allègements de programmes supposent une réflexion sur ce qui est important et ce qui est accessoire et cela doit être modulé selon le niveau (collège, lycée, université), et la filière (scientifique ou non scientifique).

Monsieur le président, cher collègue

Je pense, comme beaucoup, que notre association ne doit plus se contenter de déplorer la lourdeur de certains programmes, mais doit maintenant œuvrer pour obtenir leurs allègements. Il y a urgence.

Deux faits sont aisément vérifiables :

1) une grande majorité de collègues se plaignent de ne pas pouvoir terminer les programmes de seconde et ceux de la section S ou de n'y parvenir qu'en les bâclant, ce qui revient au même.

2) l'enseignement, même en S, se réduit de plus en plus à la donnée de recettes et ainsi ne joue plus le rôle formateur qui lui est assigné dans les instructions générales (voir par exemple, l'article d'Isabelle Voltaire dans un récent numéro de la revue Repères).

La dérive néfaste signalée au 2) ne peut convenir aux adhérents de notre association. Elle est clairement une conséquence du 1), même si d'autres causes peuvent contribuer à l'engendrer. Les programmes sont trop lourds parce qu'ils présentent trop d'outils, si bien que les temps d'apprentissage nécessaires pour acquérir un minimum de maîtrise de chacun sont large-

ment sous-estimés. En outre l'outil présenté au niveau n , je n'ose pas dire étudié, n'est pas toujours réinvesti au niveau $n+1$, justement parce qu'à ce niveau trop d'outils doivent aussi être présentés. Dans ces conditions les connaissances restent à l'état formel et ne peuvent se transformer en savoirs.

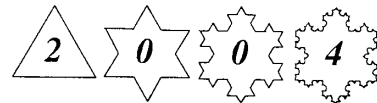
Sont aussi sous-estimés le temps que l'on doit consacrer à apprendre à chercher, le temps que l'on doit consacrer aux révisions nécessaires, même si les faiseurs de programmes semblent avoir voulu escamoter ce temps en disant que ces révisions doivent être faites lors de la découverte des notions nouvelles.

Le résultat est que les profs en arrivent à baisser les bras, à sauver les meubles en donnant des recettes pour des situations bien stéréotypées. Dans le contexte actuel, il serait illusoire de croire que le seul remède est le changement de l'évaluation, il faut auparavant alléger les programmes.

Je pense donc que notre association devrait demander ces allègements, par pétitions par exemple. Cette démarche pourrait d'ailleurs contribuer à recruter de nouveaux adhérents.

En espérant recevoir un écho favorable, je vous prie de croire, cher collègue, à mes meilleurs sentiments. Raymond Barra

Rallye Mathématique Poitou-Charentes

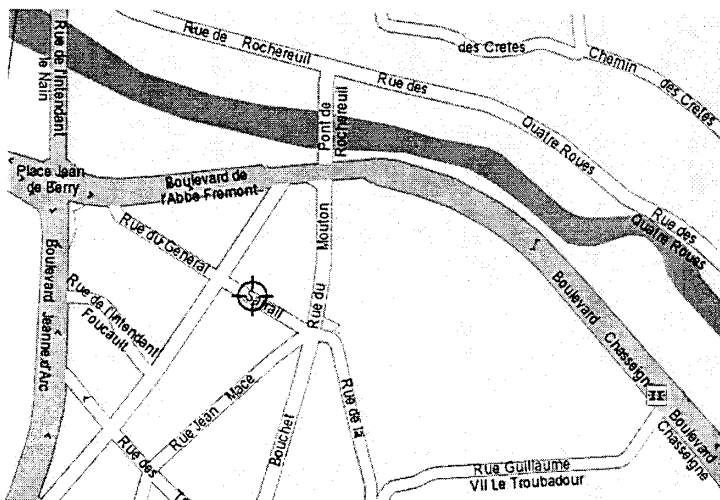


Vous trouverez en pages centrales les solutions à la dernière édition de Rallye. Nous ne pouvons pas mettre, faute de place, l'annexe concernant les solutions des problèmes du Trianglor. Vous trouverez cette annexe, l'épreuve, les solutions, ainsi que de nombreux morceaux choisis de dossiers de classes sur le site de la Régionale.

L'équipe du Rallye ne s'est pas encore réunie pour décider du calendrier. Mais vous pouvez vous attendre à recevoir le dossier d'inscription mi-janvier avec une date limite des inscriptions avant les vacances de février.

Le Corol'aire de décembre précisera ces informations.

J.F.



BUXEROLLES
Collège Jules-Verne

Bravo les matheux !



26 élèves de troisième remporte le prix académique de mathématique.

Les 26 élèves de troisième du collège Jules-Verne ont remporté le prix du Rallye mathématique de Poitou-Charentes. Un rallye organisé par l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) et par l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public avec le soutien de l'inspection pédagogique régionale. Ce rallye est proposé autant aux élèves de troisième que de seconde.

Tous ont plâché sur le même sujet au mois d'avril, bien que le classement soit différent.

A la suite de ce classement, les élèves de Jules-Verne sont arrivés à devenir les autres avec un niveau qui ne leur laisse rien à envier aux élèves de seconde, affirme le professeur, Moustafa Bourhara.

Centre-Press 21/6/04

La vie de l'IREM

Qu'est-ce que l'IREM ? Que font les animateurs en dehors de l'encadrement de stages ou des stagiaires IUFM ?

Comment préparent-ils ces formations ? Sur quoi se basent-ils ?

Nous avons pris conscience que si, pour certains, les réponses à ces questions sont évidentes, il n'en est pas de même pour tous. Et nous avons donc pris la décision de vous informer régulièrement de ce qui fait la vie de l'IREM,

L'IREM c'est d'abord une équipe, 18 enseignants de collège et de lycée, sans compter les anciens qui n'hésitent pas à donner un coup de main. Nous aimons nous retrouver et travailler ensemble. Chaque stage, chaque formation, chaque publication est préparé en équipe jusque dans les détails.

C'est aussi un lieu ressource, avec notamment un secrétariat : depuis le 1^{er} septembre, il est assuré par Marie-Claude LINARD, qui arrive d'Orsay où elle s'occupait de formation continue d'adultes. Elle a pris la suite de Mireille BIGUET qui a assuré l'intérim après le départ d'Annette FONTAINE et qui a beaucoup travaillé au niveau de la bibliothèque.

L'IREM, Institut de Recherche, ne s'occupe pas uniquement de formation, mais d'abord de Recherche : non pas de recherche fondamentale (il y a des laboratoires universitaires de didactique, d'histoire et épistémologie ou de sciences de l'éducation...), mais une recherche assez proche de la « recherche-développement » dans les entreprises : analyser les besoins du terrain et s'approprier les résultats de la « recherche pure » de manière à améliorer constamment le produit, c'est-à-dire, pour nous, la formation de nos élèves.

Concrètement comment cela se passe-t-il ? Chaque membre de l'IREM est enseignant de terrain, et a de nombreux contacts : avec ses collègues de son établissement, avec ceux qu'il rencontre au cours de ses formations, avec des collègues d'autres IREM, rencontrés par exemple dans les commissions Inter-IREM...

D'autre part, nous essayons de nous tenir au courant des recherches existantes, par des revues, des brochures ou livres qui arrivent à notre bibliothèque, par la participation à des colloques ou à des conférences...

Enfin, nous participons à de nombreux groupes de travail internes à l'IREM ou Inter-IREM...

Chaque formation (stage ou séance de formation initiale) est préparée par toute une équipe de 6 à 8 animateurs même si elle est encadrée par un seul individu, et chacune de ces préparations est alimentée par un travail de fond, fait en amont, indépendamment des intitulés des formations, lesquelles sont souvent dictées par les besoins définis par l'institution. Ce travail de fond donnait lieu, il y a quelques années, à la rédaction de brochures papier. Aujourd'hui, nous nous orientons davantage vers la rédaction d'articles pour des revues, et de pages pour le site de l'IREM.

Deux exemples pour l'illustrer :

En Juin dernier, nous avons organisé avec la commission Inter-IREM un colloque de didactique, auquel l'ensemble de l'équipe a participé activement (voir par ailleurs), colloque qui concluait une recherche de quatre ans faite avec d'autres équipes IREM dans le cadre de l'INRP.

En cette rentrée de Septembre, au delà des indispensables réunions pour mettre au point les calendriers et le contenu des formations, nous avons pu écouter Dominique GAUD présenter à l'ensemble de l'équipe (collège et lycée) un diaporama qu'il avait réalisé sur la construction des polygones réguliers. Ce diaporama a permis d'évoquer certains problèmes de fond : Pourquoi la règle et le compas ? Faut-il y voir des problèmes techniques (seuls instruments faciles à fabriquer) ou au contraire liés aux fondements de la géométrie ? Beaucoup d'énoncés des Eléments d'Euclide sont rédigés en termes de construction, y compris dans les « demandes » ou « axiomes », et dans le dernier théorème du dernier livre, lequel porte sur la construction d'un polygone à 15 côtés... D'autre part, que penser des constructions approchées ? Celles-ci sont parfois plus performantes techniquement que les constructions exactes ! Et ceci interroge notre manière d'enseigner : comment aidons-nous nos élèves à démêler le Vrai et le Faux, l'Exact et l'Approché ? Ces questions seront proposées dans le stage lycée « Constructions à la Règle et au Compas », et sur le site de l'IREM, mais après avoir été ainsi débattues au sein de l'équipe...

L'équipe IREM s'est beaucoup renouvelée (notamment cette année, au niveau collège), mais reste ouverte à la participation de ceux qui souhaitent s'y investir.

Jean SOUVILLE, directeur de l'IREM.

IREM, 40 Avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers CEDEX, tél : 05 49 45 38 77 mël : irem@univ-poitiers.fr
Il est situé au rez-de-chaussée du bâtiment Delta (ancien bâtiment de Mathématiques) du campus Sciences.

Le site WEB : <http://irem.univ-poitiers.fr/irem> doit être prochainement réorganisé ; mais vous y trouvez : les publications (brochures - papier notamment) avec pour la plupart un résumé et le sommaire, des ressources en ligne sur l'histoire des mathématiques et sur quelques points des programmes (perspective en Term L, statistiques en 3^e), ou encore des documents liés aux stages.

Colloque de didactique

Il s'est tenu début juin dans les locaux de l'IREM de Poitiers.
Il avait pour thème « Faire des mathématiques en classe ».



Ce colloque national (quelques belges étaient aussi présents !) était destiné en priorité aux formateurs mais pas seulement et avait pour objectif de confronter les différentes recherches menées dans le cadre d'une action entre l'Institut de Recherche Pédagogique (INRP) et l'Assemblée des directeurs d'IREM.

90 personnes ont participé aux travaux. Les conférences et ateliers ont permis de comprendre les apports des théories didactiques et de tisser des liens entre la recherche fondamentale en didactique des mathématiques et la pratique quotidienne des enseignants.

Sur le site de l'IREM (<http://irem.univ-poitiers.fr/irem/>) on pourra trouver un descriptif des ateliers et conférences.

La contribution de l'IREM de Poitiers a porté sur « Quelques interrogations à propos du tableau de signes » et plus précisément :

- Pourquoi étudier le signe d'une expression polynomiale ?
- Quelle importance doit-on accorder à la détermination du signe d'une expression et à l'enseignement de la technique du tableau de signes ?
- Quand a-t-on étudié le tableau de signes historiquement ? Dans quels buts ? Avec quelles techniques ?
- Comment les techniques d'étude du signe d'une expression ont-elles évoluées depuis le début du siècle dernier.

Notre contribution est en ligne sur le site de l'IREM et les actes du colloque sont disponibles à l'IREM de Poitiers.

Atelier de culture scientifique

Depuis de nombreuses années existait à l'IREM un groupe de réflexion sur les liens qui unissent les mathématiques et la philosophie. De nombreuses publications de l'IREM de Poitiers comportant recherches théoriques et applications aux classes ont émané de ce groupe :

- *Les chantiers du Chaos*
- *Les Fractales*
- *Sur les géométries non euclidiennes*
- *Des tangentes aux infiniment petits*
-

Cet atelier a évolué pour s'orienter maintenant vers des liaisons entre les sciences et la philosophie. Les objectifs ont été aussi redéfinis

- Faire des recherches qui favorisent des activités interdisciplinaires dans les classes
- Approfondir l'épistémologie des disciplines scientifiques enseignées dans les lycées.
- Montrer en quoi les recherches en épistémologie des sciences interrogent la philosophie

- Publier nos recherches en expliquant en quoi elles permettent de pratiquer l'interdisciplinarité.

Pour atteindre ces objectifs, nous utilisons les moyens suivants

- Co-formation
- Interventions extérieures ou participations à des rencontres (le séminaire d'histoire des sciences à l'Espace Mendès-France par exemple).
- Débats entre participants.

Ce groupe de travail qui comporte une douzaine de personnes n'est pas inscrit au PAF. Il se réunit 3 fois par an (le vendredi après midi en général dans les locaux de l'IREM à Poitiers). Il est ouvert aux personnes extérieures qui souhaitent s'y joindre. Pour le bon fonctionnement du groupe, celui-ci ne peut excéder 20 personnes.

Les participants reçoivent un ordre de mission sans frais.

Si vous désirez participer, vous pouvez contacter :

Dominique Gaud : dom.gaud@wanadoo.fr

Tél : 05 49 54 45 43

L'équipe 1^{er} cycle

L'équipe premier cycle de l'IREM se renouvelle quelque peu. Elle est aussi impliquée fortement dans la formation initiale PLC2, et dans la formation continue. Bienvenue aux nouveaux collègues : Marie PARENT (Vienne), Sébastien PEYROT, Fabrice TARRA (Charente), Bertrand LEBOT (Deux-Sèvres).

Remercions ici quelques animateurs avertis qui, s'ils prennent quelque distance avec la formation, continuent à donner beaucoup de leurs idées et de leur temps dans différents moments forts : Madeleine MAROT, Claude ROBIN, Jean-Paul GUICHARD.

Le reste de l'équipe est constitué de Gilbert PERILLAUD, Thierry CHEVALARIAS, Jean-Paul MERCIER.

Stages

L'IREM encadre cette année

des stages d'offre qui sont sous sa seule responsabilité.		des stages "public ciblé ou public désigné" qui sont sous la responsabilité de l'Inspection Pédagogique Régionale
<i>au collège</i> • Géométrie de l'Espace et logiciels • Culture et Histoire des Maths • Place du calcul mental.	<i>au lycée</i> • Stats-Probas au lycée, • Géom. espace et Perspectives • Constructions règle et compas • Histoire du Calcul Différentiel	• Progressions au collège • TICE au collège • Maths-Physique au Lycée.

RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - 6 avril 2004

Éléments de solutions

1 Sophie Germain (15 points)

- Sophie Germain est née le 1er avril 1776 à Paris et est décédée le 27 juin 1831 à Paris.
- Elle avait 18 ans lorsqu'elle a vécu cette période terrible de la « Terreur » (1793-1794) pendant la Révolution française.
- Elle correspondait avec Lagrange sous le nom de Le Blanc et se faisait passer pour un élève de l'école Polytechnique. À cette époque, les femmes étaient mal vues dans le milieu des sciences, et en tant que femme, elle n'aurait pas été prise au sérieux. Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) était un mathématicien français.
- Pierre de Fermat était un mathématicien français (1601 – 1665). Il conjectura que l'équation $x^n + y^n = z^n$ ($x, y, z \neq 0$), n'a de solutions entières que pour $n \leq 2$.
- Pour $n = 2$, on reconnaît le théorème de Pythagore !
- $(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2) = [(n^2 + 2) + 2n][(n^2 + 2) - 2n] = (n^2 + 2)^2 - 4n^2$
 $= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = n^4 + 4$
- $n^4 + 4 = 1\,718\,786\,550\,629 = 1\,313\,317 \times 1\,308\,737$.
- Une conjecture est une proposition considérée comme fortement probable, mais qui n'est pas encore démontrée.

2 Cinémath (5 points)

Les trois séances de plus à l'Eucclidovisuel ont réuni 2004 - 4 x 354 = 2004 - 1416, soit 588 places. L'Eucclidovisuel contient donc le tiers de 588, soit **196** places.

3 D'un coup de baguettes (15 points)

Les côtes de la base rectangulaire de la pyramide sont obligatoirement les baguettes de longueurs 24 cm et 60 cm.

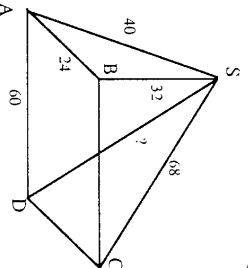
Le volume permet de déterminer la hauteur de la pyramide : $15,36 \text{ dm}^3 = 15360 \text{ cm}^3$.

$(15360 \times 3)/(24 \times 60) = 46,080/1440 = 32$, ce qui permet de s'assurer que la baguette de longueur 32 est bien perpendiculaire à la base. Le théorème de Pythagore ou sa réciproque permet de montrer qu'il faut utiliser les

baguettes 40 et 68 pour les triangles SBA et SBC, qui sont rectangles en B.

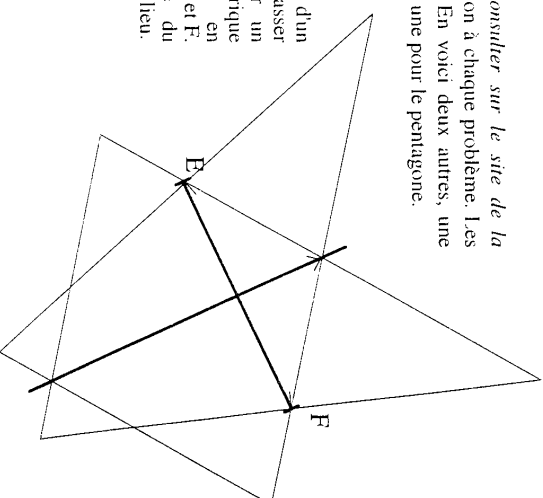
Le théorème de Pythagore permet de calculer $BD^2 = 4176$, puis $SD^2 = 5200$.

On en déduit que la dernière baguette mesure $\sqrt{5200} = 20\sqrt{13}$.

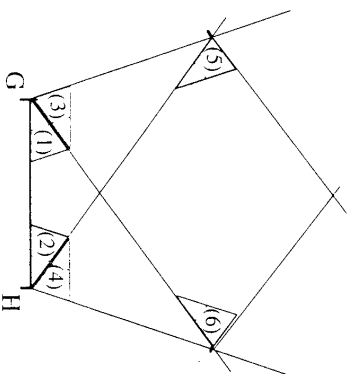


8 Trianglor (15 points)

La feuille en annexe (à consulter sur le site de la Région) donne une solution à chaque problème. Les solutions sont nombreuses. En voici deux autres, une pour le milieu du segment et une pour le pentagone.



Placer le milieu d'un côté d'un trianglor en E, et faire passer l'autre côté par F. Placer un deuxième trianglor symétrique par rapport au premier en intervenant les rôles de E et F. On obtient la médiatrice du segment [EF] et donc son milieu.



En plaçant le trianglor successivement dans les positions données par l'ordre des numéros, on obtient le pentagone. Cette solution et celle de la feuille annexe reposent sur le fait que l'angle intérieur d'un pentagone est de 108° .
 $108^\circ = 180^\circ - 72^\circ$ pour la solution de la feuille annexe, et $108^\circ = 72^\circ + 36^\circ$ pour la solution ci-contre.

4 Le menteur (10 points)

Que Coralie ou Anthony soit le menteur, les propos de Déborah sont dans tous les cas contradictoires.

Si c'est Déborah qui est la menteuse, ce sont les propos de Jonathan qui sont alors contradictoires. Il ne reste plus que le vilain Jonathan comme menteur et finalement comme coupable. Une relecture de l'énoncé permet de s'en convaincre.

9 Le voyage d'Émile IV (10 points)

Émile IV met 100 000 s pour parcourir les 2 004 000 m, soit 27 h 46 min et 40 s. Il va donc s'arrêter 13 fois 20 min et 04 s, soit 15652 s ou 4 h 20 min 52 s. Il mettra donc en tout 32 h 7 min 32 s pour parcourir les 2004 km.

Il arrivera le 22/04/2004 à 4h 11 min 32 s.

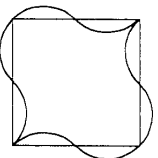
5 Le cadeau d'Annie Versaire (15 points)

Pour que les nombres se suivent de 50 en 50, il suffit de multiplier ceux du premier carré magique (qui se suivent de 1 en 1) par 50. La somme de ce nouveau carré magique est donc $30 \times 50 = 1500$. Mais on veut que la somme du carré magique soit de 2004. Il faut donc augmenter cette somme de $2004 - 1500 = 504$. Puisqu'il y a 4 nombres par ligne, il faut donc augmenter chaque nombre de $504 : 4 = 126$. Il suffit maintenant de « translater » tous les nombres du carré magique précédent de 126 ; et on obtient le carré magique ci-contre.

826	576	326	276
126	476	626	776
676	726	176	426
376	226	876	526

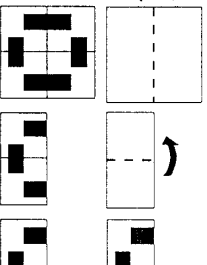
6 De tommettes en tommaths (10 points)

L'aire d'une tommath est la même que celle d'un carré de diagonale la distance entre les pointes de la tommath. L'aire de l'ensemble des tommaths du dessin est donc égale à l'aire du carré ABCD. Cette aire est la moitié du carré de côté AC, c'est-à-dire $16 \times 16 = 256$. Comme il y a 64 tommaths dans ce carré, l'aire d'une tommath est $256/64 = 4$.



7 Logigrilles (15 points)

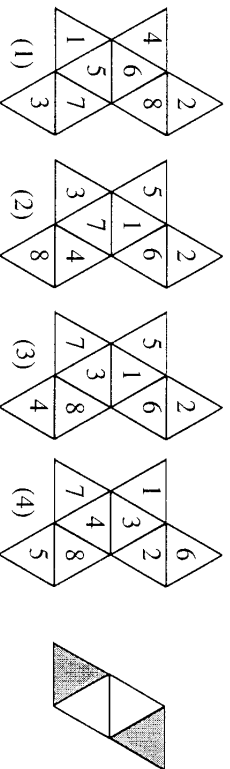
- a) En « remontant » les flèches à partir du motif final on obtient le dessin ci-contre. C'est donc la figure 5 qui convient.
b) L'observation des dispositions des motifs les uns par rapport aux autres permet de procéder par élimination. Il reste les assemblages 1, 4, 5 et 8.



c) Propositions de logigrilles.

Voici la meilleure proposition que nous avons trouvée. Elle émane de la 3^{ème} B du collège de Montigny. Bravo à cette classe.

Sur un dé en forme d'octaèdre, la somme des faces opposées est égale à 9. Voici quatre dispositions des points sur un patron d'octaèdre. Lesquelles sont correctes ?



La réponse est (2). Les faces opposées sont repérables dans les patrons d'octaèdre par les triangles grisés de la configuration ci-dessus.

10 Les dés sont jetés (10 points)

Avec 3 dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, combien peut-on écrire de nombres de 3 chiffres ? Quel est le plus petit ; quel est le plus grand ? Combien y a-t-il de nombres qu'on ne peut pas écrire entre le plus grand et le plus petit ?

On peut écrire $6 \times 6 \times 6 = 216$ nombres à trois chiffres donnés par trois dés. Le plus petit est 111 et le plus grand est 666.

Première solution : Entre ces deux nombres, on ne peut pas écrire les nombres qui contiennent en chiffres des dizaines ou en chiffres des unités un 0, un 7, un 8 ou un 9. À partir de 111, il y a 117, 118, 119, 120 ; 127, 128, 129, 130, jusqu'à 167, 168, 169, 170, c'est-à-dire $4 \times 6 = 24$ nombres puis tous les nombres de 171 à 211, c'est-à-dire 40. Ainsi, entre 111 et 611 il y a $5 \times (24 + 40) = 320$ nombres. Reste à compter ceux qu'on ne peut pas écrire entre 611 et 666 : 617 à 620, 627 à 630, 637 à 640, 647 à 650 et 657 à 660, c'est-à-dire $4 \times 5 = 20$ nombres. Il y a donc en tout 340 nombres qu'on ne peut pas écrire entre 111 et 666.

Deuxième solution : De 111 à 666 il y a 556 nombres (bornes comprises). Or on ne peut en écrire que 216 (dont 111 et 666). Il y a donc $556 - 216 = 340$ nombres qu'on ne peut pas écrire entre 111 et 666.

Compléments pour la classe de Seconde

11 Le lièvre et le chien (15 points)

Première solution : 7 sauts de chien égalent 11 sauts de lièvres ; donc 1 saut de chien équivaut à $11/7$ de saut de lièvre.

En 4 sauts de chien, c'est-à-dire en $44/7$ de sauts de lièvre, le lièvre fait 6 sauts, soit $42/7$ sauts de lièvres.

En 4 sauts, le chien gagne donc $2/7$ de sauts de lièvre. Or il a 9 sauts de lièvres en retard, soit $63/7$ de saut de lièvre. Il lui faut donc rattraper $31,5 \times 2/7$ de saut de lièvre et donc faire $31,5 \times 4 = 126$ sauts.

Deuxième solution : Prenons la longueur d'un saut de chien comme unité de longueur et le temps d'un saut de chien comme unité de temps.

Si un saut de lièvre est désigné par l , alors $11l = 7$, d'où $l = 7/11$.

Sachant que le lièvre fait 6 sauts pendant que le chien en fait 4, le lièvre parcourt donc une distance de $6l = 42/11$ dans un temps égal à 4. Sa vitesse est donc de $42/44$.

Compte tenu du choix des unités, la distance x parcourue par le chien répond à l'équation $x = t$. L'avance du lièvre étant de 9, soit $63/11$, la distance x parcourue par le lièvre répond à l'équation $x = 21/22 t + 63/11$. À la rencontre, nous avons donc : $t = 21/22 t + 63/11$, soit $22/22 t = 21/22 t + 126/22$. D'où $t = 126$. Le chien attrapera donc le lièvre au bout de 126 sauts.



Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Frédéric de Ligt

☞ Pour ouvrir cette rubrique de rentrée, voici un florilège de citations mises en bouquet par Serge Parpay.

Deux citations données par Jean-Pierre Luminet, astrophysicien à l'Observatoire de Meudon, en tête de deux chapitres de son livre "L'univers chiffonné" – Edition Fayard 2002 * :

« Deux choses sont infinies : l'univers et la bêtise humaine ; mais en ce qui concerne l'univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue ».

Phrase attribuée à Albert Einstein.

« Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite, à condition que les deux points soient situés bien en face l'un de l'autre ».

Pierre Dac.

* «... Ce livre traite de la topologie de l'Univers, sujet aux ramifications multiples qui obligent à faire des incursions dans les mathématiques, la physique, l'astrophysique, mais aussi l'histoire des idées, les concepts philosophiques, voire les références artistiques... ».

J-P. Luminet.

Un livre remarquablement bien écrit, exposant des idées et théories récentes que beaucoup d'entre nous ne connaissent peut-être pas. S. P.

« Il faut se rendre chaque proposition assez familière pour n'être point étonné qu'elle ait été trouvée. Il faut qu'elle paraisse si naturelle qu'on eût pu soi-même la découvrir au moyen de ce qui précède.

Il faut exercer son imagination beaucoup plus que sa mémoire, lire peu et penser beaucoup, chercher par soi-même les démonstrations, essayer ses forces le plus souvent qu'on le peut, développer les choses qu'on a lues, ne chercher dans le livre que la confirmation de ce qu'on a trouvé ».

Lalande.

Un certain nombre de commerçants ont en commun un capital de 8240 couronnes ; chacun y a contribué pour un nombre de couronnes égal à quarante fois le nombre de partenaires ; ce capital leur rapporte un gain égal en pourcentage au nombre de partenaires ; lorsque leur bénéfice est partagé, on trouve que, après que chacun ait reçu un nombre de couronnes égal à dix fois le nombre de partenaires, il reste 224 couronnes. Trouver ce nombre de commerçants (Euler). Problème cité par G.Polya.

☞ Envoyé par la mystérieuse Léa Broutille :

Les deux exercices ci-dessous sont assez souvent donnés dans des publications ; nous les reprenons cependant, plusieurs de nos collègues ne les ayant pas encore rencontrés. Ils ont été « habillés » pour un emploi éventuel en classe.

Devenez célèbre !

Un problème, qui paraît pourtant simple, n'a pu être jusqu'à présent résolu. De grands mathématiciens s'y sont exercés sans succès. Et vous ? Voilà le problème (appelé parfois problème de Syracuse) :

Vous partez d'un nombre :

. s'il est pair, vous le divisez par 2. Par exemple avec 10 vous obtenez 5.

. s'il est impair, vous le multipliez par 3 puis vous ajoutez 1. Par exemple avec 5 vous obtenez $5 \times 3 + 1 = 16$.

Vous recommencez avec le nombre obtenu, et ainsi de suite. Vous avez alors une suite de nombres (appelée parfois suite de Colatz).

À titre de démarrage, voilà le début d'une suite : $13 - 40 - 20 - 10 - 5 \dots$ Continuez !

Tentez votre chance avec 128, 1024, 27... – Avec 27, bon courage !

Un problème qui tourne bien !

Prenez le nombre 4176. Mettez ses chiffres d'abord dans l'ordre décroissant (7, 6, 4, 1) pour former le nombre 7641, puis dans l'ordre croissant (1, 4, 6, 7) pour former le nombre 1467. Calculez la différence $7641 - 1467$. Vous obtenez 6174. Si vous recommencez la transformation ci-dessus avec le nombre 6174, vous retombez sur lui ! 6174 est appelé « constante de Kaprekar ».

Mais attendez : prenez un nombre quelconque de quatre chiffres non tous pareils (5555 est interdit ; un nombre commençant par des zéros est admis par exemple 0974, 0086, 0003). Soit par exemple le nombre 5870. Faites à partir de ce nombre la transformation ci-dessus : 8,7,5,0 donne 8750 et 0,5,7,8 donne 578. On calcule la différence : $8750 - 0578 = 8172$. Et avec 8172 on recommence ! Et on continue ! Combien de fois ? « Pas plus de 7 ! ». Ah ? (Il est possible de justifier le résultat)

☞ Des problèmes

58-1 de Jacques Drouglazet (Surgères)

On donne les suites numériques u, v, w définies par $u_0 = 1 ; v_0 = \sqrt{2} ; w_0 = 2 ;$

$u_{n+1} = |v_n - u_n| ; v_{n+1} = |w_n - v_n| ; w_{n+1} = |u_n - w_n|$ pour tout entier naturel n . On considère alors l'ensemble $E_n = \{u_n ; v_n ; w_n\}$. Donner l'expression de l'ensemble E_n en fonction de n . Montrer que cet ensemble a pour limite l'ensemble $\{0 ; 0 ; 0\}$ quand n augmente indéfiniment. Reprendre l'exercice en remplaçant $\sqrt{2}$ par $\sqrt{3}$.

58-2 de Frédéric de Ligt (Montguyon)

Un triangle partage son cercle circonscrit en trois arcs. À partir de chaque arc, on construit le symétrique du milieu de l'arc par rapport à la corde qui sous-tend cet arc. Montrer que l'orthocentre du triangle obtenu coïncide avec le centre du cercle inscrit dans le triangle initial.



Des solutions

52-1 (de Frédéric de Ligt)

Une grille de loto est constituée de cases numérotées de 1 à 14. On remplit une grille en cochant 3 cases. Combien faut-il remplir de grilles pour être certain de trouver au moins 2 des 3 numéros qui vont sortir ?

Complément apporté par Ivan Riou à la solution donnée dans le corollaire n° 55.

Dans le bulletin de janvier, Frédéric de Ligt donne une solution (spectaculaire) avec 14 bulletins à l'aide du plan de Fano. Prouvons que cette solution ne peut être améliorée.

Supposons que l'on n'a rempli que 13 bulletins : on n'a coché en tout que 39 numéros ; puisqu'il y a 14 numéros distincts, un numéro a été coché au plus deux fois. Par symétrie, on peut supposer que ce numéro est le 14.

a) Si le 14 a été coché exactement dans 2 grilles, l'ensemble des numéros qui n'ont pas été cochés dans ces 2 grilles est de cardinal supérieur ou égal à $13 - 4 = 9$. Par symétrie, on peut supposer que ces numéros sont $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Pour que le tirage $\{a; b; 14\}$ avec $1 \leq a < b \leq 9$ soit tel qu'il existe une grille remplie ayant au moins deux numéros communs avec ce tirage, il est nécessaire que cette grille figure parmi les $13 - 2 = 11$ grilles restantes.

Or, parmi les 11 grilles restantes, 33 numéros ont été cochés, et comme $33/9 < 4$, il existe au moins un numéro (disons le 9) de l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ qui a été coché dans $k \leq 3$ grilles.

Il reste alors au moins $8 - 6 = 2$ numéros de $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ n'ayant pas été cochés dans ces $k \leq 3$ grilles, disons les numéros 1 et 2. Le tirage $\{1; 9; 14\}$ ne verra donc aucune des 13 grilles remplies posséder au moins 2 numéros communs avec celui-ci.

b) Si le 14 a été coché dans exactement une grille, on peut raisonner de même ($36/11 < 4$).

c) Si le 14 n'a pas été coché du tout, le même raisonnement s'applique également ($39/13 < 4$).

55-2 (de Jacques Drouglazet)

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = (2n+3)U_n + n+1$. Exprimer U_n en fonction de n .

Solution d'Ivan Riou : Posons $V_n = U_n + 1/2$; on a $V_{n+1} = (2n+3)V_n$ et $V_0 = 3/2$. Donc $V_n = (2n+1)(2n-1)\dots \times 5 \times 3 \times 3/2$
D'où $U_n = 3 \times (2n+1)! 2^{-n-1} (n!)^{-1} - 1/2$.

55-1 (de Jacques Drouglazet)

a désignant un nombre réel ou complexe non nul donné, on considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et } u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + a \cdot u_n \cdot u_{n+1} (*), \text{ pour tout } n \text{ entier naturel.}$$

Exprimer u_n en fonction de n . En particulier, pour $a = -1/2$, quelle est la limite de u_n lorsque n augmente indéfiniment ?

Solution d'Ivan Riou : Remarquons que la relation de récurrence (*) équivaut à : Pour tout entier naturel n on a $u_{n+2} = (\sqrt{a} \cdot u_{n+1} + 1/\sqrt{a})(\sqrt{a} \cdot u_n + 1/\sqrt{a}) - 1/a$ (où $\sqrt{a}$ est tel que, si $a = \text{Re}^{i\theta}$, $R > 0$, on ait $\sqrt{a} = \sqrt{R}e^{i\theta/2}$).

Posons donc $v_n = \sqrt{a} \cdot u_n + 1/\sqrt{a}$; on a $v_0 = v_1 = \sqrt{a} + 1/\sqrt{a} = b$. La relation (*) équivaut donc à : $\forall n \geq 0 \quad v_{n+2} = \sqrt{a} v_{n+1} v_n$.

- Vérifions par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $v_n = a^{(f_n-1)/2} b^{f_n}$

où f_n est définie par : $f_0 = 1$; $f_1 = 1$ et $\forall n \geq 2 \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (suite de Fibonacci).

Preuve : $v_0 = v_1 = b$. La formule est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

On suppose que $\forall p \leq n \quad v_p = a^{(f_p-1)/2} b^{f_p}$ alors $v_{n+1} = \sqrt{a} v_n v_{n-1} = \sqrt{a} a^{(f_n+f_{n-1})/2-1} b^{f_n+f_{n-1}} = a^{(f_{n+1}-1)/2} b^{f_{n+1}}$.

- Déterminons f_n en fonction de n : $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$; $r^2 - r - 1 = 0 \Leftrightarrow r \in \{r_1; r_2\}$ où $r_1 = (1 - \sqrt{5})/2$; $r_2 = (1 + \sqrt{5})/2$.

D'où pour tout entier naturel $f_n = A r_1^n + B r_2^n$.

Si $n = 0$: $1 = A + B$ donc $B = 1 - A$;

Si $n = 1$: $1 = A(1 - \sqrt{5})/2 + (1 - A)(1 + \sqrt{5})/2 \Leftrightarrow -\sqrt{5}A = 1 - (1 + \sqrt{5})/2 \Leftrightarrow A = (5 - \sqrt{5})/10$ et $B = (5 + \sqrt{5})/10$.

D'où $f_n = (5 - \sqrt{5})/10 \times [(1 - \sqrt{5})/2]^n + (5 + \sqrt{5})/10 \times [(1 + \sqrt{5})/2]^n$.

- On a donc $u_n = (v_n - 1/\sqrt{a})/\sqrt{a} = a^{f_n/2-1} b^{f_n} - 1/a$; d'où $u_n = a^{f_n/2-1} (\sqrt{a} + 1/\sqrt{a})^{f_n} - 1/a = [(a+1)^{f_n} - 1]/a$.

Si $a = -1/2$, u_n tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

52.2 (de Léa Broutille) :

Soit un quadrilatère convexe ABCD dont les diagonales se coupent en O. K est l'orthocentre du triangle ADO, H l'orthocentre du triangle CBO, I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. Montrer que les segments [HK] et [IJ] sont orthogonaux.

Ce problème de géométrie a manifestement bien plu. Voici une autre solution de Louis Rivoallan, agrémentée d'une "narration de recherche" que nous avons reçue au retour des vacances.

Solution de Louis Rivoallan : Les vacances, c'est le moment où l'on a du temps pour chercher. Alors voici une autre démonstration du problème 52.2. La démonstration proposée dans Corol'aire était fondée sur les triangles semblables. Elle m'a rappelé ma jeunesse, avec Salut les Copains, les Beattles, bref les années 60. Celle-ci est plus « moderne », avec du produit scalaire, des transformations, des invariants. C'est celle des années 70, le capes, etc.

Il s'agit d'une version achevée, qui ne montre pas la véritable démarche. La narration de recherche, comme on dit maintenant pour être à la mode, vous l'aurez à la suite.

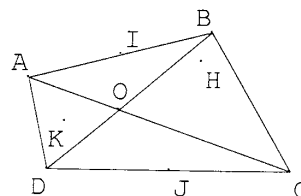
Soit le produit scalaire $x = \overrightarrow{KH} \cdot 2\overrightarrow{IJ}$. (Des problèmes de logiciel ne nous permettent pas de mettre les flèches sur les vecteurs. Mais votre œil exercé saura quand même les voir. NDLR)

$$x = \overrightarrow{KH} \cdot 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KH} \cdot (2\overrightarrow{OJ} - 2\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{KH} \cdot (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OK}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

$$x = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Puisque K est l'orthocentre de AOD, alors $(\overrightarrow{OK}) \perp (\overrightarrow{AD})$ et $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

De même, $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Donc $x = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{BC}$.



Considérons la similitude directe s qui transforme A en C et D en B. Soit O' et K' les images respectives de O et de K dans cette transformation. D'une part, on a $(\overrightarrow{OD} ; \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{O'B} ; \overrightarrow{O'C})$ par conservation des angles par la similitude, et d'autre part $(\overrightarrow{OD} ; \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$ qui sont opposés par le sommet. Donc $(\overrightarrow{O'B} ; \overrightarrow{O'C}) = (\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$.

Cela montre que O, O' , B et C sont cocycliques, et même plus précisément que O et O' sont sur le même arc capable relatif à [BC]. Soit ω le centre de ce cercle et M le milieu de [BC]. Une propriété classique de l'orthocentre du triangle permet de dire que $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{\omega M}$. La similitude conservant l'orthogonalité, K' est l'orthocentre de $O'BC$.

On a donc aussi $\overrightarrow{O'K'} = 2\overrightarrow{\omega M}$. Par suite $\overrightarrow{O'K'} = \overrightarrow{OH}$. En revenant à x on peut désormais écrire :

$$x = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{O'K'} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{BC} = s(\overrightarrow{OK}) \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OK} \cdot s(\overrightarrow{AD})$$

Or pour tout couple de vecteurs u et v et pour toute similitude s , $u \cdot s(v) - s(u) \cdot v = 0$. Donc $x = 0$.

On peut donc dire que les droites (IJ) et (HK) sont perpendiculaires.

Narration de recherche.

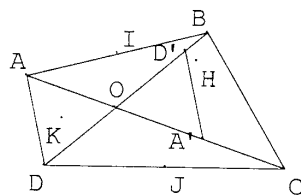
D'abord, il y a les barycentres. Au fait, l'orthocentre, c'est quoi comme barycentre ?

Il y a de la tangente là-dedans.

C'est galère. J'arrête, c'est trop pénible. Et le produit scalaire ? Je vais essayer. Là, il faut utiliser l'orthogonalité. À quoi bon prendre le produit scalaire sinon ?

J'arrive à : $x = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Je vais faire tourner d'un demi-tour le triangle ADO afin de mettre tous ces vecteurs « du même côté ». J'y verrai plus clair et cela ne changera pas la valeur de x . Comme de toute façon il doit être nul ... J'obtiens la figure ci-contre.

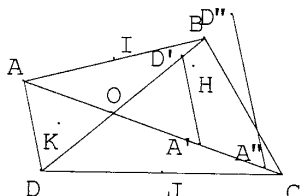


Pour calculer les produits scalaires, on utilise souvent les normes et les angles, enfin le cosinus. Si je transforme le nouveau ADO par une homothétie afin que les vecteurs AD et BC aient la même longueur, ça va multiplier les deux termes par un même nombre, donc ça va multiplier x par ce nombre.

Et comme x doit être égal à 0, ... J'obtiens la figure ci-contre.

Là, je suis resté en panne un certain temps, pour ne pas dire un temps certain.

Et si je faisais coïncider les vecteurs AD et BC ? On va faire tourner le vecteur AD pour l'amener sur le vecteur BC. Zut, en vacances, j'ai pas Cabri. Va falloir faire la figure à la main.



Curieux, les vecteurs OH et $\overrightarrow{O'K'}$ ont l'air d'être pareils ! Suis-je bête ! Bien sûr qu'ils sont égaux car sinon le produit scalaire ne peut pas être nul. Mais c'est pas une démonstration, ça ! Si j'arrive à le prouver, c'est gagné.

Bon sang, mais c'est bien sûr ! C'est l'exo que je donne en première S (quand j'en ai), avec le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre. Je l'ai mon invariant. À la place d'un demi-tour, d'une homothétie et d'une rotation, je dois pouvoir n'utiliser qu'une similitude. Y a plus qu'à écrire tout ça proprement et à l'envoyer à Corol'aire...

(Envoyez-nous des narrations de recherche. Elles ne sont pas faites uniquement pour les élèves ! La preuve ! Un grand merci de la rédaction de Corol'aire à Louis Rivoallan.jp)

Les perles de nos copies

Les trois premières proviennent du site de notre ouèbemestre Samuel Dussubieux : <http://membres.lycos.fr/samy>

(Cinquième) Si on relie tous les points ensembles, nous obtenons une droite qui n'est pas droit (qui est tordue).

(Quatrième) $-7/3 > -8/3$ car un nombre négatif qui est le plus grand est celui qui est le plus petit

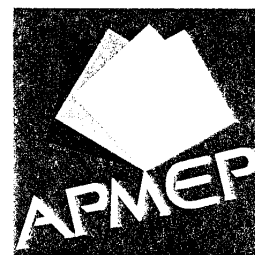
(Quatrième) Ces deux droites sont tristement parallèles puisqu'elles ne se rencontrent pas.

(Première) La fonction croisse et décroisse.

(Terminale) La fonction est en espalier.

Vous aussi vous trouvez de perles dans vos copies : n'hésitez pas à nous les envoyer ...

Association
des **P**rofesseurs
de **M**athématiques
de l'**E**nseignement
Public

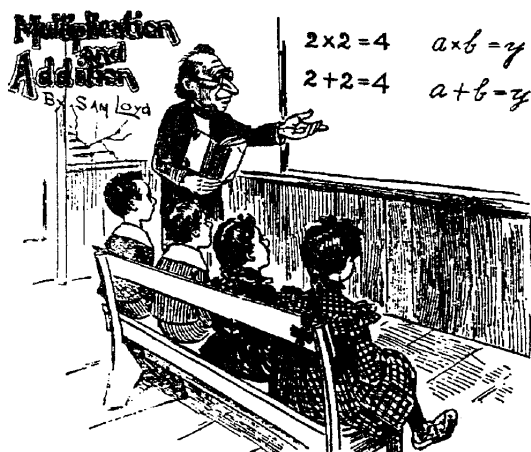


La Régionale A.P.M.E.P.
de Poitou-Charentes
vous invite à participer
à la conférence.

Muriel RAGUENEAU

Florence VABRES

Orthophonistes



POUR AFFICHAGE

POITIERS

le mercredi 13 octobre 2004

de 20h à 22h à

la Maison des Trois Quartiers
25 Avenue du Général Sarrail

Les difficultés de raisonnement et de calcul chez l'enfant

*Les difficultés de raisonnement
et de calcul chez l'enfant
sont un souci pour les parents
et les enseignants,
entre autres parce qu'elles compromettent
la réussite scolaire.*

*Des tests spécifiques
(sériation, inclusion, conservation ...)
permettent de mettre en évidence assez tôt
les comportements anormaux,
et donc de les traiter.*

*Les deux intervenantes
présenteront et commenteront
leur pratique dans ce domaine.*