RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Frédéric de Ligt

Des problèmes

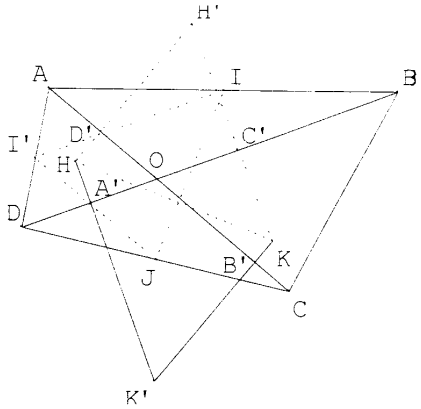
57-1 *de Sébastien Peyrot (Angoulème)* :
On considère l'équation $z^2 - 2(2 + i)z + a + ib = 0$. Déterminer l'ensemble des points P du plan complexe de coordonnées (a ; b) tel que les racines du polynôme aient le même module.

57-2 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* :
Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour peindre le disque unité fermé de telle sorte que deux quelconques de ses points, séparés par une distance unité, ne reçoivent pas la même couleur ?

Des solutions

52-2. Soit un quadrilatère convexe ABCD dont les diagonales se coupent en O. H est l'orthocentre du triangle ADO, K est l'orthocentre du triangle CBO, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD]. Montrer que les segments [HK] et [IJ] sont orthogonaux.

Solution de Frédéric de Ligt :
Complétons tout d'abord la figures par quelques points supplémentaires. I' sera le milieu de [AD], H' et K' les orthocentres respectifs des triangles ODC et OBA, A' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur (BD), B' et D' les projetés orthogonaux de B et D sur (AC).
Dans le cas où les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires, les orthocentres H et K sont confondus en O et le segment [HK] n'est plus qu'un point, l'énoncé n'a alors plus de sens (un traitement par le produit scalaire couvrirait aussi ce cas, mais ce n'est pas l'esprit de la solution attendue)
En dehors du cas limite évoqué ci-dessus, on va prouver que les triangles II'J et KH'H sont directement semblables. On se place dans un plan orienté.



Remarquons tout d'abord que HH'KK' est un parallélo-gramme. En effet, la hauteur (DD') contient les orthocentres H et H', de même la hauteur (BB') contient les orthocentres K et K' et ces deux hauteurs étant toutes deux perpendiculaires à la diagonales [AC], on en déduit que (HH') est parallèle à (KK'). De façon analogue, on montre que (HK') est parallèle à (H'K).

Tous les angles que l'on va considérer maintenant sont orientés et leur mesure est définie modulo 2π. Comme (II') et (I'J) sont respectivement parallèles aux diagonales [BD] et [AC], les angles JI'I et D'OA' sont de même mesure comme angles opposés du parallélogramme I'D'OA'. Ensuite les angles D'OA' et C'OD' sont supplémentaires. Enfin les angles C'OD' et D'H'C' sont supplémentaires car le quadrilatère C'H'D'O est inscriptible dans le cercle de diamètre [H'O]. D'où l'égalité des mesures des angles JI'I et D'H'C' ou encore de celle de JI'I et de HH'K.

L'aire du parallélogramme HH'KK' peut s'écrire HH' x B'D' ou H'K x A'C' d'où HH' / H'K = A'C' / B'D'.
Les triangles rectangles OAA', OBB', OCC' et ODD' sont semblables donc OA' / OA = OB' / OB = OC' / OC = OD' / OD. Par conséquent A'C' / B'D' = AC / BD et l'on obtient HH' / H'K = AC / BD. Comme la propriété des milieux donne AC = 2I'J et BD = 2I'I on aboutit à l'égalité recherchée HH' / H'K = I'J / I'I
Il est maintenant établi que les triangles II'J et KH'H sont directement semblables. Il suffit, pour finir, d'observer que les côtés correspondants [JI'] et [HH'] sont perpendiculaires, de même que [I'I] et [H'K] et donc les deux derniers côtés correspondants sont aussi perpendiculaires, il s'agit de [IJ] et [KH].

53-5 (*de Jean-Philippe Verneau*) :
On dispose d'une urne contenant 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire au hasard deux boules, puis on remet les deux boules dans l'urne. On effectue ainsi n tirages. Quelle est la probabilité d'avoir tiré les boules numérotées de 1 à 15 après les n tirages ?

Solution de Frédéric de Ligt : Notons $A_n(i)$ l'événement consistant à ne pas avoir tiré la boule numérotée i après n tirages et $p(A_n(i))$ sa probabilité. Notons B_n l'événement consistant à avoir tiré les boules numérotées de 1 à 15 après n tirages. On a alors que B_n est le complémentaire de $A_n(1) \cup \ldots \cup A_n(15)$.
Utilisons *la formule du crible* : $p(A_n(1) \cup \ldots \cup A_n(15)) = \sum_{1 \le i \le 15} (-1)^{i-1} \left(\sum_{1 \le r_1 < \ldots < r_i \le 15} p(A_n(r_1) \cap \ldots \cap A_n(r_i)) \right.$

Comme les événements $A_n(1),\ldots,\ A_n(15)$ sont échangeables c'est-à-dire que, pour n fixé, la probabilité de l'intersection de i quelconques d'entre eux ne dépend que de i pour tout entier i entre 1 et 15 on a alors :

$p(A_n(1)\cup\ldots\cup A_n(15)) = \sum_{i=1}^{15}(-1)^{i-1}\binom{15}{i}\,p(A_n(1)\cap\ldots\cap A_n(i))$. Puisque l'on tire deux boules,

on a $p(A_n(1)\cap\ldots\cap A_n(15)) = p(A_n(1)\cap\ldots\cap A_n(14)) = 0$, et pour $1 \le i \le 13$, $p(A_n(1)\cap\ldots\cap A_n(i)) = \dfrac{\binom{15-i}{2}^n}{\binom{15}{2}^n}$.

Par conséquent $p(A_n(1)\cup\ldots\cup A_n(15)) = \sum_{i=1}^{13}(-1)^{i-1}\binom{15}{i}\dfrac{\binom{15-i}{2}^n}{\binom{15}{2}^n}$. Finalement $p(B_n) = \sum_{i=0}^{13}(-1)^i\binom{15}{i}\dfrac{\binom{15-i}{2}^n}{\binom{15}{2}^n}$

On vérifie que, pour les entiers n de 1 à 7, cette probabilité est bien nulle. Par contre il serait souhaitable de disposer d'une expression plus maniable pour estimer par exemple à partir de combien de tirages on a plus d'une chance sur deux d'avoir tiré les 15 numéros. En effet, les calculs deviennent vite impraticables en raison de la taille des nombres qui interviennent.
Il serait aussi intéressant de calculer le nombre moyen de tirages nécessaires pour obtenir les 15 boules. Le problème n'est pas clos.

55-3 (*Olympiades académiques 2003 de Guadeloupe*) :
Démontrer qu'une droite partageant un triangle en deux polygones de même périmètre et de même aire passe par le centre du cercle inscrit au triangle.

Solution de Jacques Drouglazet : On note A,B et C les trois sommets du triangle. On suppose que cette droite existe, qu'elle coupe [AB] en M et [AC] en N et on pose BC = a, CA = b, AB = c, AM = u, AN = v.
Les hypothèses se traduisent par le système d'équations : AM + MN + NA = BM + MN +NC + BC (1)
1/2.AM.AN.sinA = 1/2.1/2.AB.AC.sinA (2)

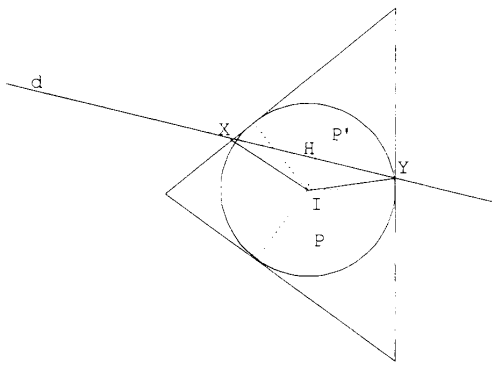
C'est-à-dire : $u + v = c - u + b - v + a$ (1)
$2uv = bc$ (2)

Ou encore $u + v = (a + b + c)/2$ (1)
$2uv = bc$ (2)

u et v sont donc les racines de l'équation en t : $2t^2 - (a + b + c)t + bc = 0$ (3)

On choisit alors le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ dans lequel M a pour coordonnées $(u/c, 0)$ et N a pour coordonnées $(0, v/b)$. D'autre part, I centre du cercle inscrit au triangle ABC, est le barycentre du système {(A, a), (B,b), (C,c)} ; ses coordonnées sont donc $x_I = b/(a + b + c)$ et $y_I = c/(a + b + c)$. Par ailleurs, l'équation de la droite (MN) est : $cx/u + by/v - 1 = 0$.
Il reste à vérifier que les coordonnées de I satisfont cette équation, c'est-à-dire $bc/[u(a + b + c)] + bc/[v(a + b + c)] - 1 = 0$ ou encore $bc(u + v)/[uv(a + b + c)] - 1 = 0$, c'est-à-dire, compte tenu des équations (1) et (2), $bc(a + b + c)/2 = bc(a + b + c)/2$. La proposition est démontrée.
Jacques Drouglazet propose comme condition suffisante d'existence d'une telle droite : a compris entre b et c. Il se pourrait même que cela soit une condition nécessaire, mais cela reste à prouver...

Solution de Frédéric de Ligt : Notons I le centre du cercle inscrit au triangle, r le rayon de ce cercle, d la droite qui partage le triangle en deux polygones P et P' de même périmètre p et de même aire S ; notons X et Y les points d'intersection de d avec les côtés du triangle et enfin H le projeté orthogonal de I sur d.



Le point I est situé ou bien à l'intérieur d'un des deux polygones, ou bien sur leur côté commun [XY].
L'aire du polygone contenant I s'écrit :
(p-XY)r/2+ IH.XY/2
et l'aire de l'autre polygone s'écrit :
(p-XY)r/2- IH.XY/2.
Ces deux aires étant égales à S, on a alors IH.XY = 0 et donc IH = 0, d'où I appartient à d.

56-1 *de Stéphane Saint-Jean (Pommiers-Moulons)* :
Quel est le comportement de la suite de terme général $\sin((1+\sqrt{2})^n\pi)$ quand n croit indéfiniment ?

Solution de Daniel Daviaud : intéressons-nous d'abord à $(1+\sqrt{2})^n$.
$(1+\sqrt{2})^0 = 1$; $(1+\sqrt{2})^1 = 1+\sqrt{2}$; $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$; $(1+\sqrt{2})^3 = 7+5\sqrt{2}$; etc.
Finalement $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec a_n et b_n entiers. Et $(1+\sqrt{2})^{n+1} = (a_n+b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = (a_n+2b_n) + (a_n+b_n)\sqrt{2}$.

D'où $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Et ceci nous introduit dans le paradis de l'algèbre linéaire. Mais commençons par quelques observations.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	3	7	17	41	99	239	577
b_n	1	2	5	12	29	70	169	408
a_n / b_n	1	1,5	1,4	≈1,416	≈1,414	≈1,41428	≈1,41420	≈1,414215

Ceci permet de conjecturer que a_n / b_n converge vers $\sqrt{2}$. Lorsque cette conjecture aura été démontrée, on en déduira que b_n est équivalent à $a_n / \sqrt{2}$, et donc que $a_n + b_n\sqrt{2}$ équivaut à $a_n + \sqrt{2}a_n / \sqrt{2} = 2\,a_n$.
Autrement dit : $(1+\sqrt{2})^n$ est de plus en plus proche d'un entier pair, si bien que $(1+\sqrt{2})^n\,\pi$ s'approche de 0, modulo 2π. En conclusion, $\sin((1+\sqrt{2})^n\,\pi)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Démonstration de la conjecture.

Les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont les racines de $\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}$ qui vaut

$(1-x)^2 - 2 = (1-x-\sqrt{2})(1-x+\sqrt{2})$. On trouve donc $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$. Un vecteur propre associé à $1+\sqrt{2}$ est un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} a+2b \\ a+b \end{pmatrix} = (1+\sqrt{2})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Un vecteur propre associé à $1-\sqrt{2}$ est un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} a+2b \\ a+b \end{pmatrix} = (1-\sqrt{2})\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ convient. On a donc $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ceci se vérifie aisément, n'est-ce pas cher lecteur ?

En conséquence $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$. Pour alléger le calcul qui suit, nous posons $\alpha = (1+\sqrt{2})^n$ et $\beta = (1-\sqrt{2})^n$. Il est clair que α tend vers $+\infty$ et que β tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)\sqrt{2} & 2(\alpha-\beta) \\ \alpha-\beta & (\alpha+\beta)\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)\sqrt{2} & 2(\alpha-\beta) \\ \alpha-\beta & (\alpha+\beta)\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{2} \\ 1-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Or, lorsque n tend vers $+\infty$, β / α s'approche de 0. D'où a_n / b_n tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
J'aimerais savoir s'il existe une ruse qui éviterait la grosse artillerie matricielle. Pour l'instant, je ne vois pas.

Solution de Frédéric de Ligt : Voici une astuce qui devrait plaire à Daniel Daviaud.
Pour n entier naturel la quantité $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ ne prend que des valeurs entières, en effet on a la suite d'égalités où le dernier membre est manifestement entier :

$$(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{2}^k + (-1)^k\sqrt{2}^k = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2p}2^{p+1}$$

Comme $(1-\sqrt{2})^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car $|1-\sqrt{2}| < 1$, alors $(1+\sqrt{2})^n$ tend vers 0 modulo 1 quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que $(1+\sqrt{2})^n$ en croissant avec n tend à se rapprocher de plus en plus de valeurs entières.
Par conséquent $\sin((1+\sqrt{2})^n\,\pi)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.