RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Appelé à assurer une nouvelle rubrique dans le Bulletin Vert de l'APMEP, Serge Parpay a souhaité passer la main après tout le beau travail accompli. J'essaierai, dans la mesure de mes moyens, de conserver la qualité et l'esprit qu'il a su donner à l'animation de votre rubrique.
Frédéric de Ligt

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.
F. d L.

☞ Des problèmes

56-1 *de Stéphane Saint-Jean (Pommiers-Moulons)* : Quel est le comportement de la suite de terme général $\sin((1+\sqrt{2})^n\pi)$ quand n croît indéfiniment ?

56-2 *de Jean-Christophe Laugier (Rochefort)* :

1) Soient a, b et c des entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < 1$; montrer que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}$.

2) D'une manière plus générale : soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers supérieurs ou égaux à 1 tels que : $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots\dots+\frac{1}{a_n} < 1$; montrer que $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots\dots+\frac{1}{a_n} < \frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}+\dots\dots+\frac{1}{e_n}$, (e_n) étant la suite d'entiers définie par : $\left\{\begin{array}{l} e_1 = 2 \\ e_{n+1} = e_1\dots\dots e_n + 1 \ (n \geq 1) \end{array}\right\}$

56-3 *de Frédéric de Ligt (Montguyon)* : Parmi les entiers de 1 à 200, j'ai tiré 101 nombres au hasard et j'ai constaté que pour deux de ces nombres l'un divisait l'autre. Est-ce un hasard ?

56-4 *de Jacques Chayé (Poitiers)* : Un point A est fixé à l'intérieur d'un cercle. Deux droites perpendiculaires pivotent autour de A ; la première coupe le cercle en M et M', la seconde en N et N'. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments [MN], [NM'], [M'N'] et [N'M]. Démontrer que I, J, K et L décrivent un même cercle.

56-5 *de Serge Parpay (Niort)*: En 1594, le mathématicien belge Adrien Romain soumet à "tous les mathématiciens du monde entier" l'équation suivante :
$45x - 3\,795x^3 + 95\,634x^5 - 1\,138\,500x^7 + 7\,811\,375x^9 - 34\,512\,075x^{11} + 105\,306\,075x^{13} - 232\,676\,280x^{15} + 384\,942\,375x^{17} - 488\,494\,125x^{19} + 483\,841\,800x^{21} - 378\,658\,800x^{23} + 236\,030\,652x^{25} - 117\,679\,100x^{27} + 46\,955\,700x^{29} - 14\,945\,040x^{31} + 3\,764\,565x^{33} - 740\,259x^{35} + 111\,150x^{37} - 12\,300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45}$ = un nombre donné.
La réaction de François Viète est immédiate : "Ubi legi, ut solvi" (sitôt lu, sitôt résolu) !
Ceux qui ont suivi la conférence de Jean-Paul Guichard le 10 décembre dernier ont quelques lumières sur cette question. Les autres sauront-ils la résoudre ?

☞ Des solutions

53-1 (*de Jean-Christophe Laugier*) :
On dispose de deux octogones réguliers de même taille découpés par exemple dans du carton. Les premiers sont numérotés de 1 à 8 dans le sens des aiguilles d'une montre. Est-il possible de numéroter les sommets du second (de 1 à 8) de manière que, pour toute superposition du premier sur le second, il y ait une occurrence et une seule de deux sommets superposés portant le même numéro ?

Solution de Jean-Christophe Laugier : Le problème peut se formaliser de la manière suivante : Il s'agit de numéroter les sommets du second octogone α_1, α_2, ...α_8 en partant d'un sommet quelconque et en le parcourant dans le sens des aiguilles d'une montre de telle sorte que pour tout entier k compris entre 0 et 7, il existe un entier i_k unique compris entre 1 et 8 tel que $k + i_k = \alpha_{i_k}$ modulo 8.

Les nombres $i_0, i_1, \dots\dots, i_7$ sont distincts deux à deux ; en effet, si l'on avait $i_k = i_{k'}$ pour $0 \leq k < k' \leq 7$, de $k + i_k = \alpha_{i_k}$ modulo 8 et $k' + i_{k'} = \alpha_{i_{k'}}$ on tirerait k = k' modulo 8 d'où k = k' puisque $1 \leq k < k' \leq 8$.

L'égalité $\sum_{k=1}^{8}(k+i_k) = \sum_{k=1}^{8}\alpha_{i_k}$ modulo 8 doit donc être vérifiée ; soit $\sum_{k=1}^{8}k + \sum_{k=1}^{8}i_k = \sum_{k=1}^{8}\alpha_{i_k}$ modulo 8.

Or $\sum_{k=1}^{8} k = \sum_{k=1}^{8} i_k = \sum_{k=1}^{8} \alpha_k = 36$ et par suite 36 + 36 = 36 modulo 8. Donc 36 = 0 modulo 8 ce qui est faux. Le problème posé n'a donc pas de solution !

On voit d'autre part aisément que si l'on généralise le problème à des polygones à n côtés, il n'y aura pas de solution dans le cas où n est pair ; cela est dû au fait que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ n'est pas divisible par n lorsque n est pair. En revanche lorsque n est impair, on a toujours au moins une solution : $\alpha_k = 2k$ modulo n pour $k = 1, 2, \ldots n$.

Par exemple, si $n = 5$: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 3$, $\alpha_5 = 5$

53-2 (*de Jean-Christophe Laugier*) :

Dans un dictionnaire en 10 volumes, je dois chercher la définition de 10 mots. Combien de volumes différents vais-je, en moyenne, consulter ? On suppose naturellement que chaque mot figure dans un volume donné avec la probabilité 1/10 et que les 10 attributions de volumes sont indépendantes.

Solution de Frédéric de Ligt : Ce problème vient d'être évoqué et résolu de façon élégante par R. Ferréol dans le Bulletin Vert n°447. Je le cite : "L'espérance du nombre d'ouvertures de volumes est la somme des espérances du nombre d'ouverture de chacun des volumes, pour la consultation des n mots.

Or la contribution d'un volume donné au nombre de volumes à consulter a une espérance E qui se confond avec la probabilité d'utiliser ce volume, d'après la propriété selon laquelle la probabilité d'un événement est aussi l'espérance de la variable aléatoire valant 1 si l'événement est réalisé et 0 sinon, puisque cette contribution est 1 quand on l'utilise et 0 sinon.

Comme pour chaque dictionnaire, j'ai une chance sur p qu'un mot donné se trouve dedans, la probabilité d'utiliser un volume donné quand je cherche n mots est $E = 1 - (1 - \frac{1}{p})^n$. L'espérance cherchée est donc $E = n\left(1 - (1 - \frac{1}{p})^n\right)$.

J'arrête là ma citation. Appliquée à $n = 10$ et $p = 10$ cette expression donne pour E environ 6,5 volumes à ouvrir pour chercher 10 mots dans un dictionnaire en 10 volumes.

53-3 (*de Jean-Christophe Laugier*) :

Soit un ensemble A de nombres entiers compris entre 1 et 1 000 tel qu'aucun élément de A ne soit le double d'un élément de A. Quel est le nombre maximal d'éléments de A ?

Solution de Frédéric de Ligt :

Pour i entier impair inférieur à 1 000, notons $C(i) = \{2^n i \,/\, n$ entier positif ou nul et $2^n i \leq 1\,000\}$.

Il s'agit de la chaîne des doubles qui n'excèdent pas 1 000, construite à partir d'un entier impair i inférieur à 1 000. On crée ainsi une partition de l'ensemble des entiers de 1 à 1 000 ; tout entier non nul inférieur ou égal à 1 000 appartient à un unique $C(i)$. Un nombre et son double appartiennent au même $C(i)$. On construit ensuite les sous-ensembles $C(i)'$ de la façon suivante : on conserve dans $C(i)$ les éléments pour lesquels n est pair. Dans $C(i)'$ on ne trouve donc plus un nombre et son double.

Pour $501 \leq i \leq 999$, soit 250 valeurs possibles pour i, CardC(i) = CardC(i)' = 1

Pour $251 \leq i \leq 499$,soit 125 valeurs possibles pour i, CardC(i) = 2 et CardC(i)' = 1

Pour $127 \leq i \leq 249$,soit 62 valeurs possibles pour i, CardC(i) = 3 et CardC(i)' = 2

Pour $63 \leq i \leq 125$, soit 32 valeurs possibles pour i, CardC(i) = 4 et CardC(i)' = 2

Pour $33 \leq i \leq 61$, soit 15 valeurs possibles pour i, CardC(i) = 5 et CardC(i)' = 3

Pour $17 \leq i \leq 31$, soit 8 valeurs possibles pour i, CardC(i) = 6 et CardC(i)' = 3

Pour $9 \leq i \leq 15$, soit 4 valeurs possibles pour i, CardC(i) = 7 et CardC(i)' = 4

Pour $i = 5$ ou $i = 7$, soit 2 valeurs possibles pour i, CardC(i) = 8 et CardC(i)' = 4

Pour i =3 soit 1 valeur possible pour i, CardC(i) = 9 et CardC(i)' = 5

Pour i =1 soit 1 valeur possible pour i, CardC(i) = 10 et CardC(i)' = 5

L'ensemble A possède un nombre maximal d'éléments quand il est la réunion des C(i)'.

$\mathrm{CardA} = \sum_{i=1}^{999} \mathrm{CardC}(i)' = 250 + 125 + 124 + 64 + 45 + 24 + 16 + 8 + 5 + 5 = 666$. Le nombre de la Bête ...

Les perles de nos copies...

(Première ES) La production est rentable si q € [110 ; 300].

(Terminale S) Le polynôme s'écrie $x^2 + x + 1$.

(Terminale S) La droite (AB) est plus aplatie que la droite (CD)

(Seconde) Je résonne dans un repaire

(Terminale S) D'après le théorème de l'anglo-centre...