RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.
S.P.

☞ Trois problèmes

55-1 (*de Jacques Drouglazet*) : a désignant un nombre réel ou complexe non nul donné, on considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + a u_n . u_{n+1}$, pour tout n entier naturel. Exprimer u_n en fonction de n.

En particulier, pour $a = -\frac{1}{2}$, quelle est la limite de u_n lorsque n augmente indéfiniment ?

55-2 (*de Jacques Drouglazet*) : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = (2n + 3)u_n + n + 1$, pour tout n entier naturel Exprimer u_n en fonction de n.

55-3 (*Olympiades académiques 2003 de Guadeloupe*) : Démontrer qu'une droite partageant un triangle en deux polygones de même périmètre et de même aire passe par le centre du cercle inscrit au triangle.

☞ Un devoir en temps libre dans une Première S.

Exercice 1

Quatre amis, Bernard, Didier, Fabrice et Pierre se retrouvent au bord d'un puits (vertical). Pendant qu'ils évoquent des souvenirs de lycée, Didier, le plus assoiffé, se penche au-dessus du puits et se demande quelle distance le sépare de la surface de l'eau.
Bernard, qui a une bonne mémoire : " C'est facile. Souvenez-vous, notre 'prof', Léa Broutille, qu'on appelait Rouletabille, nous l'a assez répété. *Lorsqu'un corps est lâché sans vitesse initiale, la distance d (en mètre(s)) parcourue par cet objet pendant un temps* t *(en seconde(s)) est* $d = 4{,}9\ t^2$ ".
Joignant le geste à la parole, il laisse tomber un caillou dans le puits, chronométrant le temps écoulé entre le lâcher et le " plouf " entendu un peu plus tard. " Deux secondes, exactement ", s'exclame Bernard.
Quelle réponse peut donner Bernard à la question de Didier ?
Pierre, perfectionniste : " Je ne pense pas que ce soit tout à fait exact, nous n'entendons pas le " plouf " au moment précis du contact, mais au moment où le son produit par le caillou en entrant dans l'eau est revenu jusqu'à nous ".
Fabrice, en pleine réflexion : " Ça ne doit pas faire une grosse différence. Notre 'prof' Ila Ransor nous faisait réciter : " *vitesse du son, trois cents mètres par seconde* ".
Reprendre le calcul de la distance cherchée, en tenant compte de la remarque de Pierre.
La remarque de Fabrice vous paraît-elle pertinente ?

N.D.L.R. : Les collègues du Lycée Jean Macé de NIORT ont emprunté abusivement les noms de Léa Broutille et du Prof. Ila Ransor ; de plus ils ne boivent pas que de l'eau. Enfin les physiciens adoptaient, de mon temps, la valeur 9,81 pour g et la valeur 340 pour la vitesse du son ; les temps changent ! S.P.

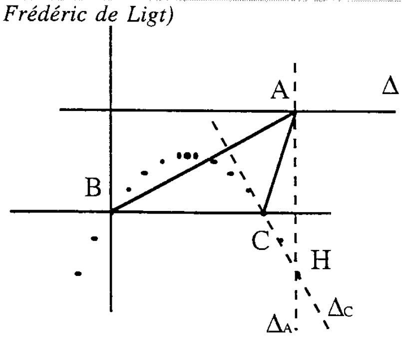
Exercice 2

On rapporte le plan au repère orthonormé (O, OI, OJ). Ω étant le point de coordonnées (3 ; -2), m étant un nombre réel, (D_m) est la droite d'équation $y = mx$ et (C) est le cercle de centre Ω et de rayon 2.
Étudier, suivant les valeurs de m, l'intersection de (C) et de (D_m). De manière plus particulière, on donnera les valeurs de m pour lesquelles (D_m) est tangente à (C).

☞ Des solutions

51-3 *(de Jacques Chayé)* :
On donne deux points B et C et une droite Δ parallèle à (BC). Un point A décrit la droite Δ. Quel est le lieu décrit par l'orthocentre du triangle ABC ?

Solution de Jean-Philippe Verneau : *(Nous avons reçu une autre solution de Frédéric de Ligt)*



Tout d'abord, l'orthocentre étant l'intersection de deux droites (enfin trois...) et analytiquement les équations de droite étant simples à trouver (voir très simples si le repère est bien choisi !!)...Choisissons le repère orthonormé (B, i, j) où i est un vecteur unitaire de (BC).
La droite D a pour équation dans ce repère : $y = a$. Posons (c, 0) les coordonnées du point C. Les nombres a et c sont des constantes non nulles. Alors le point A a pour coordonnées (u, a) où u va être notre variable... L'équation D_A de la hauteur issue de A dans le triangle ABC est : $x = u$. La droite (AB) qui passe par l'origine de ce repère a pour équation : $ax - uy = 0$. La hauteur D_C issue de C qui est perpendiculaire à (AB) a pour équation : $ux + ay + K = 0$. Mais C appartient à D_C, d'où : $K = -uc$. Donc D_C a pour équation : $ux + ay - uc = 0$.
Notons H (très original) l'orthocentre de ABC. H est le point d'intersection des hauteurs D_C et D_A.

On a donc : $x_H = u$ et $ux_H + ay_H - uc = 0$ Ce qui est équivalant à $y_H = \frac{1}{a}(-x_H^2 + cx_H)$. Donc H décrit une parabole !!

51-5 *(de Jacques Drouglazet)* :

Pour x réel positif strictement inférieur à 1, on peut écrire : $\ln(1+\sqrt{x}\,) = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{4} + \ldots$, ou encore :

$$\ln(1+\sqrt{x}\,) = \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \ldots - \frac{x^p}{p} - \ldots\right) + \sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{3} + \ldots + \frac{x^p}{2p+1} + \ldots\right)$$

a) Mettre cette expression sous la forme : $\ln(1+\sqrt{x}\,) = \int_0^1 \frac{xt}{xt^2-1}\,dt + \sqrt{x}\int_0^1 \frac{-1}{xt^2-1}\,dt$.

b) Donner une expression analogue à celle de a) pour $\ln(1+\sqrt[n]{x}\,)$, x réel positif strictement inférieur à 1 et n entier naturel supérieur ou égal à 2.

Solution de Frédéric de Ligt :

La solution présentée n'utilise pas le développement en série proposé.

Pour n entier non nul et x réel tel que $0<x<1$, $\ln(1+x^{1/n}) = \int_0^{x^{1/n}} \frac{1}{1+u}\,du$. On effectue le changement de variable $t = \frac{u}{x^{1/n}}$:

$$\int_0^{x^{1/n}} \frac{1}{1+u}\,du = \int_0^1 \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}t}\,dt = \int_0^1 \frac{x^{1/n}}{1-(-tx^{1/n})^n} \times \frac{1-(-tx^{1/n})^n}{1-(-tx^{1/n})}\,dt = \int_0^1 \frac{x^{1/n}}{1-(-t^n)x} \times \sum_{k=1}^{n}(-x^{1/n}t)^{k-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^{n} x^{k/n}(-t)^{k-1}}{1-(-t)^n x}\,dt = \sum_{k=1}^{n} x^{k/n}\int_0^1 \frac{(-t)^{k-1}}{1-(-t)^n x}\,dt. \text{ On a donc } \boxed{\ln(1+x^{1/n}) = \sum_{k=1}^{n} x^{k/n}\int_0^1 \frac{(-t)^{k-1}}{1-(-t)^n x}\,dt}.$$

Pour n = 1, on trouve $\ln(1+x) = x\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt$; pour n = 2, on trouve $\ln(1+\sqrt{x}\,) = \sqrt{x}\int_0^1 \frac{1}{1-t^2x}\,dt + x\int_0^1 \frac{-t}{1-t^2x}\,dt$;

Pour n = 3 on trouve $\ln(1+x^{1/3}) = x^{1/3}\int_0^1 \frac{1}{1+t^3x}\,dt + x^{2/3}\int_0^1 \frac{(-t)}{1-t^3x}\,dt + x\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3x}\,dt$.

Et ainsi de suite. Pour $x = 0$, l'égalité est encore vraie.

52-1 *(de Frédéric de Ligt)* :

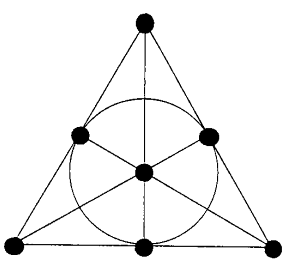
Une grille de loto est constituée de cases numérotées de 1 à 14. On remplit une grille en cochant 3 cases. Combien faut-il remplir de grilles pour être certain de trouver au moins 2 des 3 numéros qui vont sortir ?

Solution de Frédéric de Ligt :

Une solution avec 14 bulletins.

Partageons la grille en 2 parties : l'une contient les numéros de 1 à 7 et l'autre les numéros de 8 à 14. Quel que soit le résultat du tirage, il y a 2 numéros exacts qui tombent dans l'une des 2 parties.

Considérons la figure suivante (plan de Fano) contenant 7 points et 7 alignements de 3 points (le cercle est considéré comme un alignement). Elle possède une propriété remarquable : par 2 points de la figure passe un unique alignement.



Si l'on répartit les entiers de 1 à 7 de façon arbitraire sur les 7 points, il suffit alors de remplir 7 grilles correspondant aux 7 alignements pour recouvrir de façon unique les 2 numéros exacts qui tomberaient dans cette partie de la grille. En procédant de même pour les numéros de 8 à 14 on remplit à nouveau 7 grilles. Un total de 14 bulletins remplis assure donc au moins 2 numéros exacts.

Est-ce la meilleure solution ? Sans doute. Un bulletin rempli aura au moins 2 numéros en commun avec 34 tirages différents. Comme il y a 364 tirages possibles, il ne faut pas moins de 11 = E(364:34) + 1 bulletins pour espérer obtenir au moins 2 numéros gagnants.

Le minimum est donc de 11,12,13 ou 14 bulletins, mais 11, 12 et 13 semblent peu probables.

52-3 et 52-4 *(Olympiades 2002 - Glasgow)* : Vous trouverez les solutions détaillés de ces deux problèmes sur le site d'Alain Pichereau : http://perso.wanadoo.fr/alain.pichereau/