RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, <u>en plus de la copie papier</u>, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.

S.P.

☞ Des problèmes

Problème n°1 proposé par Frédéric de Ligt

Une grille de loto est constituée de cases numérotées de 1 à 14. On remplit une grille en cochant 3 cases. Combien faut-il remplir de grilles pour être certain de trouver au moins 2 des 3 numéros qui vont sortir ?

Problème n° 2

Un collègue m'a fait part d'un problème qu'il avait trouvé dans deux livres récemment édités. Ceci prouve sans doute que ce problème était bien connu.

Soit un quadrilatère convexe ABCD dont les diagonales se coupent en O. H est l'orthocentre du triangle ADO, K l'orthocentre du triangle CBO, I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

Montrer que les segments [HK] et [IJ] sont orthogonaux.

Bien sûr, le produit scalaire est un outil puissant et efficace. Imaginons que vous ne connaissez pas cet outil, mais que vous aimez bien la géométrie " élémentaire "... !

L.B.

Problème n° 3 (Origine : Olympiades 2002 – Glasgow – Source : Animath) : <u>Que de traits, que d'angles !</u>

Soit [BC] un diamètre du cercle G de centre O. Soit A un point de G tel que 0° <AÔB <120°. Soit D le milieu de l'arc AB ne contenant pas le point C. La droite passant par O et parallèle à la droite (DA) rencontre la droite (AC) en J. La médiatrice du segment [OA] rencontre G en E et F.

Montrer que J est le centre du cercle inscrit au triangle CEF.

Problème n° 4 (Origine : Olympiades 2002 – Glasgow – Source : Animath)

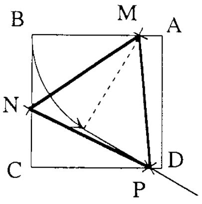
Comme l'œuf de Colomb, il suffisait d'y penser.

Soit n un entier strictement positif. Soit T l'ensemble des points (x, y) du plan pour lesquels x et y sont des entiers positifs ou nuls et $x + y = n$. Chaque point de T est colorié soit en rouge, soit en bleu. Si un point (x, y) est rouge, alors tous les points (x', y') de T avec $x' \leq x$ et $y' \leq y$ sont rouges. On appelle ensemble de type X un ensemble de n points bleus ayant des abscisses x toutes distinctes, et ensemble de type Y un ensemble de n points bleus ayant des ordonnées y toutes distinctes. Montrer que le nombre d'ensembles de type X est égal au nombre d'ensembles de type Y.

☞ Des solutions

Problème classique n° 1 - Corol'aire n° 51 : Comment tracer des triangles équilatéraux ayant leurs sommets sur trois côtés d'un carré, en particulier un triangle d'aire maximum et un triangle d'aire minimum ?

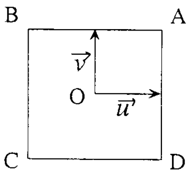
Voici une solution de Jacques Drouglazet (Autre solution reçue de F. de Ligt).



Les triangles équilatéraux cherchés doivent avoir leurs sommets sur trois côtés du carré ABCD. Ils forment donc quatre familles déduites les unes des autres par des rotations ou des symétries, selon que le côté non concerné est [AB], [BC], [CD] ou [DA]. Cherchons par exemple la famille des triangles ayant un sommet M sur [AB], un sommet N sur [BC] et un sommet P sur [CD].

a) Construction géométrique

On choisit arbitrairement M sur [AB]. P se trouvera à l'intersection de [CD] et de l'image de [BC] dans la rotation de centre M et d'angle $\pi/3$. On aura ensuite N comme image de P dans la rotation inverse.



b) Discussion

Rapportons le plan au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, O étant le centre du carré, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs colinéaires respectivement à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ (on peut prendre comme unité de longueur la moitié du côté du carré). Dans ce repère, on a : M(a ; 1), N(-1 ; y), P(x ; -1), $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1 - a \\ y - 1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}x - a \\ -2\end{pmatrix}$

Équation du problème : $x - a - 2i = [-1 - a + i(y - 1)]\ (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ [i est la racine carrée de (-1)]

Cette équation est équivalente au système : $\begin{cases}(1 + a) + \ 3\,(y - 1) = 2a - 2x \\ \sqrt{3}\,(1 + a) - (y - 1) = 4\end{cases}$

dont la solution est $x = 2\sqrt{3} - a - 2$, $y = \sqrt{3} + a\sqrt{3} - 3$.

Conditions de possibilité : $-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$; c'est-à-dire respectivement : $-1 \leq a \leq 1$, $2\sqrt{3} - 3 \leq a \leq 2\sqrt{3} - 1$ et $\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 3) \leq a \leq \frac{1}{3}(4\sqrt{3} - 3)$, c'est-à-dire finalement : $2\sqrt{3} - 3 \leq a \leq 1$.

c) L'aire S du triangle MNP est égale à $\frac{1}{2}\,MN^2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $S = a^2\sqrt{3} + 2a(\sqrt{3} - 3) + 5\sqrt{3} - 6$. Un triangle d'aire maximum correspond donc à $a = 1$ ou à $a = 2\sqrt{3} - 3$. Un triangle d'aire minimum correspond donc à $a = \sqrt{3} - 1$.

a	$2\sqrt{3} - 3$	$\sqrt{3} - 1$	1
S	$8\sqrt{3} - 12$ ↘	3	↗ $8\sqrt{3} - 12$

Problème classique n°2 - Corol'aire n° 51

Trouver tous les triplets d'entiers positifs (x,y,z) tels que $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{z+2}$.

Voici une solution proposée par Frédéric de Ligt, de Montguyon.

Posons pour simplifier X = x + 2 ; Y = y + 2 et Z = z + 2. Il s'agit de trouver les triplets d'entiers (X,Y,Z) tels que X ≥ 2 , Y ≥ 2 , Z ≥ 2 et $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{Z}$. X et Y jouant un rôle symétrique, on peut supposer que X ≤ Y . Si X = 2 alors Y = Z .

Si X = 3, alors on a l'équation $\frac{1}{Y} = \frac{1}{6} + \frac{1}{Z}$.

Si Y = 3 alors Z = 6
Si Y = 4 alors Z = 12
Si Y = 5 alors Z = 30.

Comme $\frac{1}{Y} = \frac{1}{6} + \frac{1}{Z} > \frac{1}{6}$ alors Y < 6

Si X ≥ 4 alors Y≥ 4 et donc $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{Z}$ et dans ce cas l'équation n'a pas de solution.

Les triplets solutions (x,y,z) sont donc : $(0,y,z)$ ou $(x,0,z)$; (1,1,4) ; (1,2,10) ou (2,1,10) ; (1,3,28) ou (3,1,28).

Voici une autre solution proposée par Jacques Drouglazet.

L'équation donnée équivaut à $z = \dfrac{4(x + y + xy)}{4 - xy}$.

Les entiers cherchés doivent être positifs. On doit avoir $xy = 1$ ou $xy = 2$ ou $xy = 3$.
Les triplets cherchés sont donc (1, 1, 4), (1, 2, 10), (2, 1, 10), (1, 3, 28) et (3, 1, 28).

Un exercice d'olympiade (Pologne) - Corol'aire n° 51

Résoudre l'équation trigonométrique : $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

Voici la solution proposée par Jean-Philippe Verneau, de Poitiers :

"Bon là, il y a plusieurs pistes ... (étude de fonctions par exemple ...) Mais j'ai pensé (je ne sais pas pourquoi !) tout de suite aux complexes ... Mais on a des carrés gênants ... Aussi supprimons-les !!"

Utilisons : $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a$ (1).

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(6x) = 1$; soit $\cos X + \cos 2X + \cos 3X = -1$ avec $X = 2x$

Et là on peut utiliser les complexes ... $\mathrm{Re}\,(e^{iX} + e^{i2X} + e^{i3X}) = -1$;
$\mathrm{Re}\,(e^{i2X}[1 + e^{-iX} + e^{iX}]) = -1$
$\mathrm{Re}\,(e^{i2X}[1 + 2\cos X]) = -1$.
Soit $(\cos 2X)[1 + 2\cos X] = -1$

En utilisant (1) on va obtenir une équation du 3ème degré de la variable $\cos X$ ...
$(2\cos^2 X - 1)[1 + 2\cos X] = -1$
$4\cos^3 X + 2\cos^2 X - 2\cos X - 1 = -1$
$2\cos X\ (2\cos^2 X + \cos X - 1) = 0$

Et là on remarque que $2x^2 + x - 1 = 0$ a pour solutions -1 et $\frac{1}{2}$. D'où $2\cos X\ (2\cos X - 1)(\cos X + 1) = 0$

Donc $\cos 2x = 0$ *ou* $\cos 2x = -1$ *ou* $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

Soit $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ *ou* $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ *ou* $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ *ou* $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$.

Donc l'ensemble des solutions est $S = \{\ (2k+1)\frac{\pi}{4}\ ;\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi;12) + k\pi\ ;\ -\frac{\pi}{12} + k\pi;\ k \in Z\ \}$

Nous avons reçu une autre solution de Frédéric de Ligt qui utilise les nombres complexes.

Au sujet du corrigé du problème précédent

Au lycée Fontanes de Niort en 1949, notre professeur de Math-Elem, M. Pierre Naud, auquel je transmets ici mon fidèle souvenir et toute mes amitiés,, nous apprenait les formules :

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$; $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$; $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ et $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, et nous disait : " *Retenez SI - CO ; CO - SI ; CO - CO ; SI - SI , mais attention au - de la dernière ligne !* ". Nous n'apprenions pas les nombres complexes, mais nous savions par cœur beaucoup de formules de Trigo (les formulaires n'existaient pas au baccalauréat !).

À l'aide des formules ci-dessus, après la transformation donnée par Jean-Philippe Verneau, (on utilise la troisième formule) :
$\cos 2X + \cos X + \cos 3X = -1$; $\cos 2X + 2\cos X \cos 2X = -1$; $\cos 2X\ (1 + 2\cos X) = -1$, etc.

Le charme de notre ancienne Trigo.

Serge Parpay