

Édito

Enseigner les maths : pour quoi ? pour qui ?

Tel sera le thème du séminaire national de l'APMEP en mai prochain.

Il va se tenir dans un contexte plutôt morose : nous constatons tous que le service public d'enseignement rencontre des difficultés importantes. Les symptômes d'un malaise profond sont nombreux : crise du collège unique, désaffection des filières scientifiques, difficulté accrues du métier d'enseignant, dysfonctionnement général de la formation continue.¹

Au-delà de l'enseignement, l'image de marque de la science n'est pas bonne : nuisances et catastrophes graves se succèdent, jusqu'à l'actuelle guerre en Irak, où les médias insistent ad nauseam sur la « sophistication » technique de l'armée américaine.

Or les réponses gouvernementales ne sont pas de nature à nous rassurer : au nom des économies budgétaires, on restreint de façon considérable les crédits des universités et du CNRS, on se prépare à casser les IUFM, et pour ce qui nous concerne directement, on réduit fortement les horaires de mathématiques de la sixième à la Terminale (mesure due au gouvernement précédent, mais dont les effets se font aujourd'hui sentir de façon très nette).

Dans cet environnement, il peut paraître dérisoire de parler pédagogie, autonomie, interdisciplinarité, égalité des chances, travail d'équipe...

Il faut pourtant tenir bon : c'est nous qui sommes en relation avec les jeunes, c'est nous qui pouvons leur faire partager notre passion pour une science vivante, riche de sens, au service du progrès humain. Les IDD au collège, les TPE au lycée ont cette ambition : certes les difficultés sont nombreuses, mais l'idée est bonne, ne jetons pas le bébé avec l'eau du bain !

Pour revenir aux mathématiques, les réflexions de l'APMEP seront éclairées notamment par les travaux de la CREM² : au collège, quelles mathématiques pour le citoyen, en terme d'outils comme de capacité à raisonner juste ? au lycée et au-delà, quelles mathématiques pour le technicien, l'ingénieur, l'économiste, le médecin ?

Et dans notre région soulignons trois initiatives pour faire goûter le plaisir des mathématiques : les Olympiades (26 mars), le Rallye mathématique (8 avril), l'exposition « Vive les maths » (du 4 mars au 4 mai)

Louis-Marie Bonneval

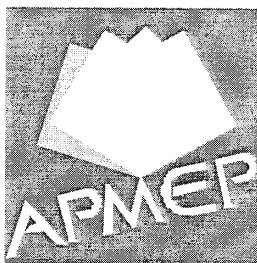
¹ Début d'une déclaration de l'ADIREM du 17 mars sur les IUFM.

² Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (animée par J-P. Kahane)

SOMMAIRE

Édito	p. 1
Comité de la Régionale	p. 2
Collège et Itinéraires de Découvertes	p. 3
Conférences "Les calendriers" (Affiche)	p. 4 et 5
Colloque "François Viète"	p. 6
"Nouvelle" revue PLOT	p. 6
Rallye mathématique Poitou - Charentes	p. 6
Rubricol(l)age	p. 7 et 8

Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l'Enseignement
Public



79 86



Régionale de
Poitou-Charentes

n° 52

Avril 2003

Dispensé de timbrage Poitiers Centre de tri

COROL'AIRE

IREM, Faculté des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX



PRESSE
DISTRIBUE PAR

LA POSTE

DÉPOSÉ LE 14.04.2003

APMEP : <http://irem.univ-poitiers.fr/apmep>
Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Le numéro : 1 E.

Abonnement 1 an (4 numéros) : 3,5 E.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur Louis-Marie Bonneval
Comité de rédaction Colette BLOCH, Serge PARPAY,
Jean FROMENTIN.
Imprimerie IREM, Faculté des Sciences
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS - CEDEX
Editeur APMEP Régionale de Poitiers
Siège social IREM, Faculté des Sciences
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P. n° 73 802
Dépôt légal Avril 2003

Vie Associative

Compte rendu Comité de la Régionale du 12 mars 2003

Le Président, Louis-Marie Bonneval, commence par excuser les absents : S. Dussubieux, J.P. Guichard, D. Gaud, Y. Noël et G. Périllaud.

1- Exposition " Vive les maths "

L'inauguration, le mardi 03 mars, à l'Espace Mendès-France, s'est très bien passée. Louis-Marie Bonneval rappelle le prix pour une classe de 25 élèves : 35 Euros.

La formation des jeunes qui encadrent les visites s'est bien déroulée. (Le recrutement s'est fait au niveau Licence ou Préparation CAPES).

L'exposition comporte les thèmes suivants :

- **Math en Méditerranée** : niveau collège. Le numéro 32/33 d'Hypercube est utile pour la préparation de cette exposition. Une version légère, d'un prix modique, peut être achetée par un établissement.
- **Les hasards de la vie** : niveau lycée. Cette exposition traite des probabilités mais aussi d'autres formes de hasard (chaos, astrologie, loi de Murphy ...).

Les conférences qui ont eu lieu : celle de J. Peiffer " Dürer en son atelier de géomètre " et celle de B. Rittaud " Les mathématiques du hasard " ont reçu un bon accueil.

Celles à venir :

- le 2 avril à 14 h à l'Amphi A de chimie de Poitiers : Denis Guedj " Histoire des nombres ".
- le 7 avril à 20 h 30 à l'Espace Mendès France de Poitiers : E. Hébert " Les instruments de mathématiques du XV^{ème} au XVII^{ème} siècle ".

Toutes ces informations sont sur le site de l'APMEP.

2- Préparation du Comité National

L'ordre du jour était le suivant :

1. Approbation du compte rendu du comité de novembre
2. Examen des rapports d'activité et financier
3. Le lycée professionnel :
 - le point sur les lycées des métiers,
 - la certification,
 - les conditions d'enseignement.
4. Le collège :
 - le collège unique,
 - le GEPS Sciences,
 - l'enquête sur les IDD.
5. Le lycée :
 - la commission bac,
 - quel type de section scientifique souhaitons-nous ?

6. Politique budgétaire de l'association :

- les adhésions
- utilisation des finances de l'association.

7. Le séminaire

8. Les journées nationales

9. Les questions diverses.

Deux thèmes ont été abordés en particulier :

- **Le collège**. Nous nous sommes posé les questions sur le collège unique : quelles structures ? quels programmes ? quelle redéfinition du service des enseignants ? Lors de la prochaine réunion I.D.D. à Poitiers le 30 mars, il sera fait un premier bilan des I.D.D., un point sur les évaluations et une étude des textes officiels pour la rentrée 2003.
- **Le lycée**. Nous notons le rétablissement d'une option obligatoire " au choix " de mathématiques en 1^{ère} L. Nous déplorons les changements précipités de programme que ce rétablissement engendre.

3- Rallye

L'épreuve officielle se déroule dans les établissements le 8 avril 2003.

4- Conférence de J. Renaudineau

Cette conférence sur " Le calendrier " aura lieu le mercredi 14 mai à 14 h 30 au lycée Audouin Dubreuil de St Jean d'Angély. Les intervenants sont Patrick Rocher et Jacky Renaudineau, astronomes à l'Observatoire de Paris.

(NDLR : Voir l'affiche jointe à ce Corol'aire.)

5- Corol'aire

Les prochains numéros paraîtront en avril, puis fin juin.

6- Site

Nous notons une fois de plus l'excellent travail de Samuel pour la mise à jour régulière de notre site. Vous y trouverez une quantité de renseignements sur la vie de l'Association. Il est toujours possible d'envoyer des informations à Samuel qui les installera sur le site.

7- Expositions de la Régionale

Nous avons fait un inventaire des expositions que nous possédons (Le Cube, Géométrie). Ces expositions ont besoin d'être restaurées. Toute personne intéressée par cette activité sera la bienvenue. Pour cela, contactez Jean Fromentin.

N'ayant pas de questions diverses à débattre, l'ordre du jour étant épuisé, la séance est close à 16 h 45.

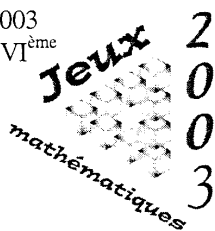
La prochaine réunion du Comité est fixée le 14 juin 2003 à 10h à Cenon.

Chantal Gobin et Jean-Samuel Priou

4^{ème} Salon des Jeux Mathématiques & de la Culture Mathématique

Les 29, 30, 31 mai et 1^{er} juin 2003
Place Saint Sulpice — PARIS VI^{ème}

Venez rendre visite au stand de l'APMEP et découvrez, sur l'ensemble de la manifestation, toutes les richesses artistiques, culturelles et ludiques des mathématiques.



Les jeunes au Comité de la Régionale. La relève est assurée !

Mathématiques au collège : Écrivez-nous.

On peut lire dans la plaquette " Visages 2002-2003 de l'APMEP " :

L'exigence démocratique du collège pour tous n'est pas satisfaite par l'organisation actuelle des enseignements. La gestion de l'hétérogénéité dans les classes nécessite du temps. Il faut créer des voies différentes pour les élèves en difficulté. Au slogan " le collège pour tous ", l'APMEP oppose " un collège pour chacun ". Elle demande avec insistance :

- la mise en place à partir de la classe de quatrième de structures différenciées adaptées aux besoins des élèves, toujours assorties de passerelles permettant des réorientations ;
- Des horaires nationaux par discipline ;
- 4 heures hebdomadaires d'un enseignement commun de mathématiques pour tous les élèves, indépendamment des heures de remise à niveau.

Devant les difficultés rencontrées quotidiennement dans notre enseignement, face au constat d'échec de certains élèves, il est indispensable que chacun d'entre nous contribue à la

réflexion de notre association :

- Quelles structures pour le futur collège ? : 3 cycles comme actuellement, 2 cycles comme précédemment ? Une autre proposition ? Doit-on retenir des éléments positifs des classes de 4^{ème} et 3^{ème} technologiques ? Comment prendre en charge les élèves en grande difficulté ?
- Quels programmes ? Des aménagements spécifiques pour les élèves en difficulté ? Lesquels ?
- Quels moyens sont nécessaires à la mise en place de ces propositions ?

Il nous faut dépasser le stade des constats et formuler des propositions sur ces questions essentielles. Faites-nous parvenir vos contributions*. Elles seront débattues au Comité régional, puis transmises à la commission " Collèges " et au Comité national.

* Par courrier postal : APMEP, IREM – Faculté des Sciences, 40 Avenue du recteur pineau, 86022 POITIERS.

* Par Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr

Les Itinéraires de Découvertes Compte rendu de la réunion du 19 mars 2003.

Lors de cette réunion, nous avons dressé un bilan à l'issue du 1^{er} semestre. Six collèges participant à des I.D.D. ont dégagé les points positifs et négatifs de cette première session et indiqué les types de production ainsi que leur mode d'évaluation.

LUSIGNAN : mesure du temps

Positif : groupe réduit (17 élèves) — ambiance différente de celle d'une classe habituelle — recherche documentaire

Négatif : peu de place pour les maths — une certaine improvisation — problème des moyens (organisation d'un déplacement impossible)

Production : exposition commune aux différents I.D.D., présentée par les élèves

Évaluation : 4 critères : fiche de route, recherche, production, implication personnelle — une note sur 20 et une appréciation au 2^{ème} trimestre

CHAUIGNY : météo

Positif : groupe réduit (14 élèves) — travail sur tableur excel et sur publisher

Négatif : improvisation, difficulté pour la concertation — problèmes liés au choix des élèves

Production : dossier individuel

Évaluation : 2 critères : production, implication personnelle — une note sur 20 et une appréciation au 2^{ème} trimestre

PARTHENAY : l'eau

Positif : visites nombreuses, intervenants extérieurs — utilisation d'un cahier de suivi — recherche documentaire, élaboration des questions

Négatif : peu de place pour les maths

Production : dossier de groupe présenté à l'ensemble de l'I.D.D.

Évaluation : 2 critères : production, implication personnelle — une appréciation au 2^{ème} trimestre ; une note tenue en réserve n'est pas portée sur le bulletin

JAUNAY-CLAN :

Positif : bonnes conditions matérielles

Négatif : peu de place pour les maths — difficultés liées à l'organisation et à la concertation

Production : exposition par panneaux dans le hall du collège

Évaluation : 2 critères : production, présentation orale — une note sur 20 et une appréciation au 2^{ème} trimestre

POITIERS RONSARD : représentation dans l'espace

Positif : les notions abordées par rapport aux programmes de maths et de techno (espace, informatique)

Négatif : difficultés liées à la présence d'élèves réfractaires au travail

Production : dossier individuel présenté en fin d'année

Évaluation : 2 critères : production, investissement personnel — une appréciation au 2^{ème} trimestre, mais pas de notes (décision commune à tous les I.D.D.)

DANGE-SAINT-ROMAIN : enquêtes, statistiques

Positif : groupe réduit, élèves motivés — travail en groupes, contacts améliorés et différents — possibilité de traiter des statistiques à partir d'exemples concrets — participation des autres élèves du collège par le questionnaire

Négatif : manque de temps pour analyser les résultats

Production : exposition commune aux différents I.D.D. présentée par les élèves

Évaluation : une note sur 20 et une appréciation au 2^{ème} trimestre

En résumé, pour la réussite d'un I.D.D. certains points paraissent essentiels :

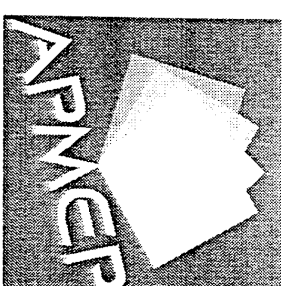
- prévoir un calendrier avec différentes pages de concertation
- bien gérer les choix des élèves
- avoir une enveloppe budgétaire spéciale I.D.D.
- ne pas avoir pour objectif de traiter le programme mais plutôt de leur donner accès à des outils documentaires ou informatiques, au travail de groupe et à des méthodes différentes.

La prochaine réunion est fixée au 14 mai 2003 à 14h30 (IREM) avec pour ordre du jour :

- approfondissement de certains thèmes de 5^{ème} en vue d'une mise à disposition
- recherche de nouveaux thèmes de 4^{ème}.

Alain Guillaud

Association
des **P**rofesseurs
de **M**athématiques
de l'**E**nseignement
Public



La Régionale A.P.M.E.P. de Poitou-Charentes
vous invite à participer la conférence :

Les Calendriers

suivi de

Passage de Mercure et de Vénus devant le Soleil

Patrick ROCHER

Jacky RENAUDINEAU

*astronomes à l'Institut de Mécanique Céleste
et de Calcul des Ephémérides,*

*Depuis l'aube de l'humanité les hommes ont cherché
à se positionner dans le temps. Pour cela ils vont*

*astronomes à l'Institut de Mécanique Céleste
et de Calcul des Ephémérides,
Observatoire de Paris*



POUR AFFICHAGE

Saint - Jean d'Angély
Lycée Audouin Dubreuil
le mercredi 14 mai 2003
à 14 heures 30

Depuis l'aube de l'humanité les hommes ont cherché à se positionner dans le temps. Pour cela ils vont utiliser très tôt les périodes de révolutions des astres.

Tous les premiers calendriers ont été purement lunaires. Certains peuples essayèrent de suivre les deux lunaires et créèrent les calendriers lunisolaire. D'autres abandonneront le cycle lunaire pour suivre uniquement le cycle solaire. C'est le cas de notre calendrier actuel : le calendrier grégorien.

L'origine actuelle fondée sur l'ère chrétienne date du VI^e siècle; par la suite on a introduit différentes manières d'écrire les dates pour les périodes antérieures à la naissance du Christ : la notation des astronomes et la notation des historiens.

Jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle, le rythme de la vie quotidienne resta lié au Soleil. L'apparition de chronomètres de plus en plus précis et le développement des moyens de transport rapides vont bouleverser notre vision du temps et de l'espace.

A.P.M.E.P. , I.R.E.M. Faculté des Sciences, 40, Avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS Cedex.

Vendredi 19 septembre et samedi 20 septembre 2003
colloque

« François Viète, un mathématicien en son temps » (Fontenay-le-Comte 1540 - Paris 1603)



Le colloque est organisé dans le cadre de la célébration nationale pour la commémoration du 400^{ème} anniversaire de la mort du mathématicien français François Viète par le Centre d'histoire des sciences et des techniques François Viète de l'Université de Nantes, en collaboration avec l'IREM de Nantes et la Ville de Fontenay-le-Comte.

Le Colloque se tiendra le vendredi 19 septembre à l'Université de Nantes et le samedi 20 septembre à Fontenay-le-Comte (Vendée). Le voyage aller-retour de Nantes à Fontenay-le-Comte se fera en autocar : départ de Nantes le samedi vers 6h30, retour à Nantes vers 19h30. Une liste d'hôtels sera envoyée lors de la confirmation de l'inscription. Les repas du déjeuner pourront être pris sur les lieux du colloque. Le dîner du Colloque aura lieu le vendredi soir à Nantes. Pour les personnes souhaitant poursuivre leur séjour nantais, il est prévu une croisière amicale sur la Loire le dimanche (environ 20 euros).

L'inscription se fait sur le site de l'IREM de Nantes : www.irem.sciences.univ-nantes.fr à partir de début mars. Une confirmation d'inscription vous sera retournée. La date limite d'inscription est le 31 mai 2003. Les frais d'inscription sont de 15 euros. Secrétariat du colloque : Catherine Robin, IREM, tel : 02 51 12 59 40, adresse mail : catherine.robin@irem-hst.univ-nantes.fr. Organisation du colloque : Evelyne Barbin et Anne Boyé, Centre François Viète.

Programme

Les interventions du vendredi, à Nantes, sont plutôt consacrées à "Viète mathématicien" et celles du samedi, à Fontenay-le-Comte, plutôt à "Viète en son temps". Vous pourrez trouver le programme détaillé sur le site de l'IREM de Nantes : www.irem.sciences.univ-nantes.fr.

De PLOT en PLOT

De Poitiers – Limoges – Orléans/Tours, la revue inter-régionale PLOT, bien connue de notre Régionale est devenue une publication nationale de l'APMEP pour **Partager, Lire, Ouvrir, Transmettre**. Vous avez déjà reçu le n° 104 (nouvelle série n°1) et avez pu apprécier sa qualité, égale à ce qu'elle a toujours été.

Mais remontons un peu le temps. Le dynamisme des Régionales de Poitiers, Limoges et Orléans/Tours a donné naissance au n° 1 de PLOT en avril 1976. Ne croyez pas que, pour être citée en tête, la Régionale de Poitiers ait été plus méritante que les deux autres ! Non. Il se trouve que cette revue a été créée à l'époque où les IREM expérimentaient les calculateurs programmables et les tables traçantes dans l'enseignement des mathématiques. Or, une des commandes utilisées par ces calculateurs programmables en direction des tables traçantes était "PLOT" (tracer). Forts de cette commande et des noms des Régionales concernées, les militants APMEP qui étaient aussi, pour la plupart, des animateurs IREM ont emprunté cette voie toute tracée : la revue s'appellerait PLOT.

Au fil des ans, la rédaction inter – régionale est devenu exclusivement orléanaise. et, depuis l'an dernier, nationale. Aussi, pour marquer le passage de témoin, la Régionale d'Orléans/Tours a organisé une sympathique soirée réunissant les anciennes et nouvelles équipes de rédaction ainsi que les responsables nationaux et régionaux concernés. Dans son discours, Jean-Claude Sachet, Président de la Régionale d'Orléans/Tours a associé les anciens et nouveaux "ploteurs" dans des remerciements pour les premiers et des vœux de succès pour les seconds.

Les invités ont terminé la soirée par un dîner offert par la Régionale d'Orléans/Tours, à la section hôtelière du Lycée Professionnel Françoise Dolto, à Olivet près d'Orléans. Corol'aire souhaite un franc succès à ce nouveau PLOT pour partager, lire, ouvrir et transmettre toute notre passion des mathématiques et de leur enseignement. J.F.



Rallye Mathématique Poitou-Charentes

8
avril

2 0 0 3

Le matériel pour le Rallye est parvenu dans les établissements. Quelques oublis de documents ont été signalés par les chefs d'établissement à Serge Parpay qui assure la permanence téléphonique du Rallye. Ces petits problèmes ont été vite résolus grâce en particulier à la facilité de communication du réseau internet.

L'épreuve du Rallye 2003 sera juste passée quand vous recevrez ce Corol'aire. Elle sera disponible sur le site de la Régionale à partir du 9 avril et publiée dans le prochain numéro de Corol'aire courant juin. L'équipe se réunira le 21 mai pour envoyer aux établissements participants le palmarès, les solutions et commentaires ainsi que les lots pour les classes ayant obtenu un prix. Comme les années précédentes, ce sont les éditions Belin qui fournissent, par l'intermédiaire du CIJM (Comité International des Jeux Mathématiques), auquel notre Régionale a adhéré, un certain nombre de beaux livres à offrir aux gagnants.



Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.

S. P.

Des problèmes

Problème n°1 proposé par Frédéric de Ligt

Une grille de loto est constituée de cases numérotées de 1 à 14. On remplit une grille en cochant 3 cases. Combien faut-il remplir de grilles pour être certain de trouver au moins 2 des 3 numéros qui vont sortir ?

Problème n°2

Un collègue m'a fait part d'un problème qu'il avait trouvé dans deux livres récemment édités. Ceci prouve sans doute que ce problème était bien connu.

Soit un quadrilatère convexe ABCD dont les diagonales se coupent en O. H est l'orthocentre du triangle ADO, K l'orthocentre du triangle CBO, I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

Montrer que les segments [HK] et [IJ] sont orthogonaux.

Bien sûr, le produit scalaire est un outil puissant et efficace. Imaginons que vous ne connaissez pas cet outil, mais que vous aimez bien la géométrie "élémentaire" ... !

L.B.

Problème n°3 (Origine : Olympiades 2002 – Glasgow – Source : Animath) : Que de traits, que d'angles !

Soit [BC] un diamètre du cercle G de centre O. Soit A un point de G tel que $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$. Soit D le milieu de l'arc AB ne contenant pas le point C. La droite passant par O et parallèle à la droite (DA) rencontre la droite (AC) en J. La médiatrice du segment [OA] rencontre G en E et F.

Montrer que J est le centre du cercle inscrit au triangle CEF.

Problème n°4 (Origine : Olympiades 2002 – Glasgow – Source : Animath)

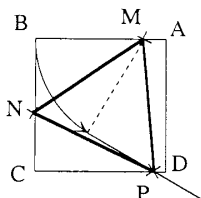
Comme l'œuf de Colomb, il suffisait d'y penser.

Soit n un entier strictement positif. Soit T l'ensemble des points (x, y) du plan pour lesquels x et y sont des entiers positifs ou nuls et $x + y = n$. Chaque point de T est colorié soit en rouge, soit en bleu. Si un point (x, y) est rouge, alors tous les points (x', y') de T avec $x' \leq x$ et $y' \leq y$ sont rouges. On appelle ensemble de type X un ensemble de n points bleus ayant des abscisses x toutes distinctes, et ensemble de type Y un ensemble de n points bleus ayant des ordonnées y toutes distinctes. Montrer que le nombre d'ensembles de type X est égal au nombre d'ensembles de type Y .

Des solutions

Problème classique n°1 - Corollaire n°51 : Comment tracer des triangles équilatéraux ayant leurs sommets sur trois côtés d'un carré, en particulier un triangle d'aire maximum et un triangle d'aire minimum ?

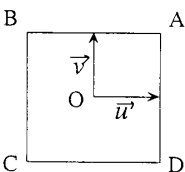
Voici une solution de Jacques Drouglazet (Autre solution reçue de F. de Ligt).



Les triangles équilatéraux cherchés doivent avoir leurs sommets sur trois côtés du carré ABCD. Ils forment donc quatre familles déduites les unes des autres par des rotations ou des symétries, selon que le côté non concerné est [AB], [BC], [CD] ou [DA]. Cherchons par exemple la famille des triangles ayant un sommet M sur [AB], un sommet N sur [BC] et un sommet P sur [CD].

a) Construction géométrique

On choisit arbitrairement M sur [AB]. P se trouvera à l'intersection de [CD] et de l'image de [BC] dans la rotation de centre M et d'angle $\pi/3$. On aura ensuite N comme image de P dans la rotation inverse.



b) Discussion

Rapportons le plan au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, O étant le centre du carré, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs colinéaires respectivement à $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ (on peut prendre comme unité de longueur la moitié du côté du carré). Dans ce repère, on a : $M(a; 1)$, $N(-1; y)$, $P(x; -1)$, $\vec{MN} \begin{pmatrix} -1-a \\ y-1 \end{pmatrix}$, $\vec{MP} \begin{pmatrix} x-a \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{MN} \cdot \vec{MP} = 0 \Rightarrow (-1-a)(x-a) - 2(y-1) = 0$$

$$\text{Équation du problème : } x - a - 2i = [-1 - a + i(y - 1)] \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad [i \text{ est la racine carrée de } (-1)]$$

$$\text{Cette équation est équivalente au système : } \begin{cases} (1+a) + 3(y-1) = 2a - 2x \\ \sqrt{3}(1+a) - (y-1) = 4 \end{cases}$$

$$\text{dont la solution est } x = 2\sqrt{3} - a - 2, y = \sqrt{3} + a\sqrt{3} - 3.$$

Conditions de possibilité : $-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$; c'est-à-dire respectivement : $-1 \leq a \leq 1$,

$$2\sqrt{3} - 3 \leq a \leq 2\sqrt{3} - 1 \text{ et } \frac{1}{3}(2\sqrt{3} - 3) \leq a \leq \frac{1}{3}(4\sqrt{3} - 3), \text{ c'est-à-dire finalement : } 2\sqrt{3} - 3 \leq a \leq 1.$$

c) L'aire S du triangle MNP est égale à $\frac{1}{2} MN^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $S = a^2\sqrt{3} + 2a(\sqrt{3} - 3) + 5\sqrt{3} - 6$. Un triangle d'aire maximum correspond donc à $a = 1$ ou à $a = 2\sqrt{3} - 3$. Un triangle d'aire minimum correspond donc à $a = \sqrt{3} - 1$.

a	$2\sqrt{3} - 3$	$\sqrt{3} - 1$	1
S	$8\sqrt{3} - 12$		$8\sqrt{3} - 12$

3

Problème classique n°2 - Corollaire n° 51

Trouver tous les triplets d'entiers positifs (x,y,z) tels que $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z+2}$.

Voici une solution proposée par Frédéric de Ligt, de Montguyon.

Posons pour simplifier $X = x + 2$; $Y = y + 2$ et $Z = z + 2$. Il s'agit de trouver les triplets d'entiers (X,Y,Z) tels que $X \geq 2$, $Y \geq 2$, $Z \geq 2$ et $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{Z}$. X et Y jouant un rôle symétrique, on peut supposer que $X \leq Y$. Si $X = 2$ alors $Y = Z$.

Si $X = 3$, alors on a l'équation $\frac{1}{Y} = \frac{1}{6} + \frac{1}{Z}$.

Si $Y = 3$ alors $Z = 6$

Si $Y = 4$ alors $Z = 12$

Si $Y = 5$ alors $Z = 30$.

Comme $\frac{1}{Y} = \frac{1}{6} + \frac{1}{Z} > \frac{1}{6}$ alors $Y < 6$

Si $X \geq 4$ alors $Y \geq 4$ et donc $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{Z}$ et dans ce cas l'équation n'a pas de solution.

Les triplets solutions (x,y,z) sont donc : $(0,y,z)$ ou $(x,0,z)$; $(1,1,4)$; $(1,2,10)$ ou $(2,1,10)$; $(1,3,28)$ ou $(3,1,28)$.

Voici une autre solution proposée par Jacques Drouglazet.

L'équation donnée équivaut à $z = \frac{4(x+y+xy)}{4-xy}$.

Les entiers cherchés doivent être positifs. On doit avoir $xy = 1$ ou $xy = 2$ ou $xy = 3$.

Les triplets cherchés sont donc $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 10)$, $(2, 1, 10)$, $(1, 3, 28)$ et $(3, 1, 28)$.

Un exercice d'olympiade (Pologne) - Corollaire n° 51

Résoudre l'équation trigonométrique : $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

Voici la solution proposée par Jean-Philippe Verneau, de Poitiers :

"Bon là, il y a plusieurs pistes ... (étude de fonctions par exemple ...) Mais j'ai pensé (je ne sais pas pourquoi !) tout de suite aux complexes ... Mais on a des carrés gênants ... Aussi supprimons-les !!"

Utilisons : $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$ (1).

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(6x) = 1$; soit $\cos X + \cos 2X + \cos 3X = -1$ avec $X = 2x$

Et là on peut utiliser les complexes ...
 $\operatorname{Re}(e^{iX} + e^{i2X} + e^{i3X}) = -1$;
 $\operatorname{Re}(e^{i2X} [1 + e^{iX} + e^{iX}]) = -1$
 $\operatorname{Re}(e^{i2X} [1 + 2\cos X]) = -1$.
Soit $(\cos 2X)[1 + 2\cos X] = -1$

En utilisant (1) on va obtenir une équation du 3^{ème} degré de la variable $\cos X$...

$(2\cos^2 X - 1)[1 + 2\cos X] = -1$

$4\cos^3 X + 2\cos^2 X - 2\cos X - 1 = -1$

$2\cos X (2\cos^2 X + \cos X - 1) = 0$

Et là on remarque que $2x^2 + x - 1 = 0$ a pour solutions -1 et $\frac{1}{2}$. D'où $2\cos X (2\cos X - 1)(\cos X + 1) = 0$

Donc $\cos 2x = 0$ ou $\cos 2x = -1$ ou $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

Soit $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ ou $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$.

Donc l'ensemble des solutions est $S = \{ (2k+1)\frac{\pi}{4} ; (2k+1)\frac{\pi}{2} ; \pi ; 12) + k\pi ; -\frac{\pi}{12} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}$

Nous avons reçu une autre solution de Frédéric de Ligt qui utilise les nombres complexes.

Au sujet du corrigé du problème précédent

Au lycée Fontanes de Niort en 1949, notre professeur de Math-Elem, M. Pierre Naud, auquel je transmets ici mon fidèle souvenir et toute mes amitiés,, nous apprenait les formules :

$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$; $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$; $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ et

$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, et nous disait : " Retenez SI - CO ; CO - SI ; CO - CO ; SI - SI , mais attention au -

de la dernière ligne ! ". Nous n'apprenions pas les nombres complexes, mais nous savions par cœur beaucoup de formules de Trigo (les formulaires n'existaient pas au baccalauréat !).

À l'aide des formules ci-dessus, après la transformation donnée par Jean-Philippe Verneau, (on utilise la troisième formule) :

$\cos 2X + \cos X + \cos 3X = -1$; $\cos 2X + 2\cos X \cos 2X = -1$; $\cos 2X (1 + 2\cos X) = -1$, etc.

Le charme de notre ancienne Trigo.

Serge Parpay