Le texte suivant, transmis par Raymond Barra, n'engage bien sûr que son auteur. N'hésitez pas à nous faire part de votre point de vue à ce sujet ou de lancer d'autres débats sur les problèmes rencontrés dans notre enseignement. Les pages de Corol'aire sont là pour cela. Toutes les adresses (postale, téléphonique, électronique et internet) sont en page 1 de ce numéro.

PROPOS SUR LE PROGRAMME TS 2002

Logarithme (ln) et exponentielle (exp). Raymond Barra

Le programme demande de présenter l'exponentielle (exp) avant le logarithme népérien (ln). Motif avoué : satisfaire la demande des physiciens qui auraient besoin très tôt de exp. Admettons et faisons taire notre étonnement : pourquoi un besoin si pressant n'a-t-il pas été déclaré en d'autres temps ? Notons toutefois que placer exp après ln ne retarde son étude que d'une quinzaine de jours au plus. L'urgence est-elle si grande ?

Laissons pour l'instant les préoccupations pédagogiques pour voir si ce nouvel ordre de présentation facilite l'exposé du point de vue mathématique.

Remarque : dans les cours d'analyse de tous les grands noms, ln est toujours avant exp (dernier en date, Dixmier)

Dans le programme, exp est définie comme solution de l'équation différentielle $y' = y$, son existence est momentanément admise, mais son unicité et sa positivité doivent être prouvées. Le programme dit que l'existence sera prouvée ultérieurement ainsi : ln étant définie comme primitive de $1/x$, et son existence prouvée lors de l'intégration, il est dit — nous citons — : "Celle de sa réciproque (de ln) en découle alors. La volonté d'introduire exp ... aura conduit à admettre un théorème d'existence qui se trouve ainsi justifié." Il commet alors une grossière erreur de raisonnement : il est vrai que la réciproque g de ln existe, mais pour affirmer que g est exp telle qu'elle a été définie il faut nécessairement prouver que g est solution de $y' = y$, donc qu'elle est dérivable. La nécessité n'étant pas indiquée, quitte à l'admettre, la conséquence est que la faute de raisonnement se retrouve malheureusement dans la littérature pour bacheliers.

Pour prouver l'existence de g réciproque de ln, plusieurs façons sont possibles, mais dans chacune, il faut d'abord montrer que g est strictement croissante ou que $g(u+v) = g(u)g(v)$ (ce qui a déjà été fait pour exp mais doit être refait), puis que g est continue, enfin que g est dérivable. Ce qui dépasse le niveau voulu d'une TS.

Remarque : Démontrer la dérivabilité de g revient à démontrer celle de exp lorsque celle-ci est définie comme réciproque de ln, ce qui était le cas dans les anciens programmes. Or ceux-ci demandaient toujours d'admettre cette dérivabilité (et les élèves de 89, par exemple, étaient aussi instruits en analyse que ceux d'aujourd'hui).

Sans doute pour éviter l'erreur de raisonnement, beaucoup de manuels définissent ln comme réciproque de exp, donc admettent son existence puisque est admise celle de exp. Bien obligés au niveau TS. Ainsi dans cette démarche, rien n'est démontré, ni l'existence de exp ni celle de ln. En outre la dérivabilité de ln doit être admise.

CONCLUSION : La progression ln puis exp est celle qui en TS permet de démontrer le plus grand nombre de résultats ; c'est aussi la plus économique : l'existence de ln étant prouvée, celle de exp définie comme sa réciproque est alors immédiate de même que le sont unicité et positivité. Si on admet sa continuité, sa dérivabilité est facile à obtenir.

Restent les considérations pédagogiques. Admettons que la problématique des équations différentielles soit la meilleure. Rien n'empêche de bien poser le problème, d'avertir comment un passage par ln va permettre sa résolution. Sinon ne pas oublier que peuvent être motivantes :

- la recherche d'une fonction qui transforme les produits en sommes,
- le défi de trouver une primitive à $1/x$ seule fonction du type $1/x^n$ dont on ne connaît pas directement une primitive.

PS1 : Le GEPS a été averti de ces anomalies. Dans un document d'accompagnement, il propose une preuve de ce que la réciproque g de ln est solution de $y' = y$. En voici une autre plus naturelle et plus courte.

Après avoir prouvé que g est strictement croissante, on prouve que $g(x)$ est proche de $g(a)$ pour tout x suffisamment proche de a. Or $g(a) - 10^p < g(x) < g(a) + 10^p$ équivaut à $\ln[g(a) - 10^p] < x < \ln[g(a) + 10^p]$. Les x qui satisfont à cette condition forment un intervalle ouvert qui contient a (utiliser la monotonie), d'où la continuité de g. Sa dérivabilité en découle. [Cette preuve de la continuité de g nous a été adressée par Marc Pichereau.]

PS 2 : Un collègue me dit qu'on peut démontrer le théorème manquant par la géométrie, et que, en outre cette démarche est très formatrice. Ma réponse : ce faisant, on commet un contre-sens « déformateur », car ce n'est pas le fait que la symétrie conserve le contact qui permet de prouver ce théorème, mais au contraire, c'est celui-ci qui permet de prouver la conservation du contact par symétrie, sinon comment prouver cela sans recours à l'analyse.

PS 3 : Intégration. Le programme demande d'introduire les suites adjacentes lors de l'intégration. Mais pourquoi, puisqu'on n'a nul besoin de cette notion, ni pour la théorie, ni pour la pratique. Il suffit de disposer des suites ayant la même limite. Est-ce pour cela que plusieurs manuels affirment que les suites

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

sont adjacentes, alors qu'elles ne le sont pas en général, même avec f strictement monotone ?