RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.

S. P.

☞ Deux problèmes classiques

1) Comment tracer des triangles équilatéraux ayant leurs sommets sur trois côtés d'un carré, en particulier un triangle d'aire maximum et un triangle d'aire minimum ?

2) Trouver les triplets d'entiers positifs (X, Y, Z) tels que $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z+2}$.

☞ Exercices de rallye : Saint-Michel en l'Herm 1996.

Dix partout.

Placer les nombres de 1 à 6, chacun une fois, dans les carrés de la figure 1 de façon à avoir un total de 10 sur chacun des trois alignements de trois nombres.

Quinze partout.

Placer les nombres de 1 à 8, une fois chacun, de façon à avoir 15 sur chacun des quatre alignements repérés par les flèches sur la figure 2.

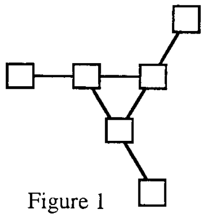


Figure 1

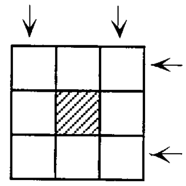
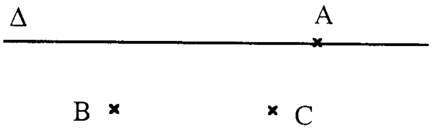


Figure 2

☞ Un exercice de Jacques Chayé (Poitiers)

On donne deux point B et C et une droite Δ parallèle à (BC).
Un point A décrit la droite Δ.
Quel est le lieu décrit par l'orthocentredu triangle ABC ?



☞ Un exercice d'olympiade (Pologne)

Résoudre l'équation trigonométrique : $\mathbf{\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1}$.

☞ Un exercice de Jacques Drouglazet (Surgères)

Pour x réel positif strictement inférieur à 1, on peut écrire : $\ln(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{4} + ...$, ou encore :

$$\ln(1+\sqrt{x}) = (-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - ... - \frac{x^p}{p} - .....) + \sqrt{x}\,(1 + \frac{x}{3} + ... + \frac{x^p}{2p+1} + ...)$$

a) Mettre certte expression sous la forme : $\ln(1+\sqrt{x}) = \int_0^1 \frac{xt}{xt^2-1}\,dt + \sqrt{x}\int_0^1 \frac{-1}{xt^2-1}\,dt$.

b) Donner une expression analogue à celle de a) pour $\ln(1+\sqrt[n]{x})$, x réel positif strictement inférieur à 1 et n entier naturel supérieur ou égal à 2.

Suite de la rubrique à la page suivante.

☞ Solutions d'exercices de Frédéric de Ligt (Montguyon)

Exercice n° 1 de Corol'aire n°49 :

On a élevé au cube une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients entiers et on a obtenu la matrice ci-contre. Quelle était cette matrice ?

$$\begin{vmatrix} 54 & -538 & -817 \\ 20 & 353 & 538 \\ 259 & -20 & 54 \end{vmatrix}$$

Les valeurs non entières de $\sigma_2(A)$ ne conviennent pas. Il reste 6 couples (Tr(A) ; $\sigma_2(A)$) possibles (-1 ; 23), (2 ; -10), (4 ; 11), (17 ; 95), (-34 ; 386), (68 ; 1541). En testant chacun de ces couples dans la seconde équation, seule le couple (17 ; 95) fournit une égalité. Finalement Tr(A) = 17 , $\sigma_2(A)$ = 95 et det(A) = 131. Le polynôme caractéristique de A est donc : $\boxed{X^3 - 17X^2 + 95X - 131I}$.

Les coefficients de A.

On va utiliser le théorème d'Hamilton-Cayley qui indique que le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A. Autrement dit, $A^3 - 17A^2 + 95A - 131I = 0$ où I désigne la matrice identité et 0 la matrice nulle, ou encore : $A^3 = 17A^2 - 95A + 131I$.

On va exprimer A^6 en fonction de A^2, A et I seulement, en utilisant systématiquement cette égalité.

$A^4 = AA^3 = A(17A^2 - 95A + 131I) = 17A^3 - 95A^2 + 131A$
$= 17(17A^2 - 95A + 131I) - 95A^2 + 131I = 194A^2 - 1484A + 2227I$
$A^5 = AA^4 = 194A^3 - 1\,484A^2 + 2\,227A = 18\,14A^2 - 16\,203A + 25\,414I$
$A^6 = AA^5 = 1\,814A^3 - 16\,203A^2 + 25\,414A = 14\,635A^2 - 146\,916A + 237\,634I$

Mais $A^6 = (A^3)^2$ peut être calculée.

On parvient donc au système de deux équations à deux inconnues A et A^2 ci-contre.

$$\begin{cases} A^3 = 17A^2 - 95A + 131I \\ A^6 = 14\,635A^2 - 146\,916A + 237\,634I \end{cases}$$

Après résolution, on a : $A = \dfrac{1}{1107247}(14635A^3 - 17A^6 + 2122593I)$

Le calcul de A^6 donne :

$$\begin{vmatrix} -219\,447 & -202\,626 & -377\,680 \\ 147\,482 & 103\,089 & 202\,626 \\ 27\,572 & -147\,482 & -219\,447 \end{vmatrix}$$

On en déduit, à l'aide de l'égalité ci-dessus, les coefficients de la matrice A :

$$A = \begin{vmatrix} 6 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Exercice n° 2 de Corol'aire n°49 :

En quelle année a été donné l'exercice de bac ci-dessous ?
Soit un nombre X de quatre chiffres écrit avec les chiffres a, b, c et a dans cet ordre. Trouver X tel qu'il soit multiple de 7 et que son reste dans la division par 99 soit 1.

Solution : *(NDLR : Des incompatibilités entre logiciels ont rendu difficiles certaines modifications. Aussi, dans ce qui suit, la plupart des « ... » doivent être lus comme « égale modulo ». Merci de votre compréhension).*

Cherchons les solutions de l'exercice.

- Examen de la condition $\overline{abca}\ ..0[7]$. $\overline{abca} = 1000a + 100b + 10c + a = 1001a + 10(10b + c)$

Comme $1001\ ..0[7]$ alors $10(10b + c)\ ..0[7]$ et donc puisque 10 n'est pas divisible par 7 on doit avoir $10b + c\ ..0[7]$. On a les possibilités : $\overline{10b + c} = 0, 7, 14, \cdots, 91, 98$.

- Examen de la condition supplémentaire $\overline{abca}\ ..1[99]$.

Si $a = 0$ le nombre s'écrit $\overline{bc0}$. On doit avoir $100b + 10c = 99b + b + 10c\ ..b + 10c\ ..1[99]$ ce qui impose $b = 1$ et $c = 0$ mais alors $10b + c = 10$ n'est pas dans la liste établie au paragraphe précédent et donc il faut chercher des solutions avec $a \geq 1$. Dans ce cas, la condition peut s'écrire $\overline{abc(a-1)}\ ..0[99]$ et puisque 9 et 11 sont premiers entre eux il faut réaliser $\overline{abc(a-1)}\ ..0[9]$ et $\overline{abc(a-1)}\ ..0[11]$. Un critère de divisibilité par 11 donne $a - b + c - (a-1) = c - b + 1\ ..0[11]$, ou encore $b\ ..c + 1[11]$. Dans la liste établie pour $\overline{bc}$ seuls 98 et 21 conviennent. Un critère de divisibilité par 9 donne $a + b + c + (a-1) = 2a + b + c - 1\ ..0[9]$. Donc avec $b = 9$ et $c = 8$, on a $a = 1$ et avec $b = 2$ et $c = 1$, on a $a = 8$.

On aboutit aux deux solutions 1981 et 8218. Peut-être cet exercice a-t-il été proposé au bac 81 ?