RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.

S. P.

☞ Solution aux exercices 2 à 6 (Corol'aire n° 47) – Louis Rivoallan.

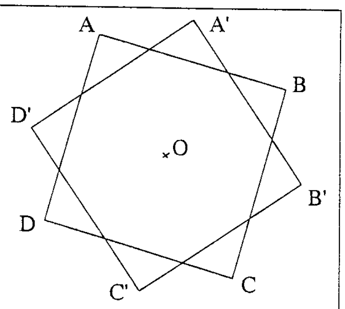
Exercice 2 : *Deux carrés ABCD et A'B'C'D' ont leurs côtés égaux et de même centre. Leurs côtés se coupent en huit points, c'est évident ! Mais comment le montrer le plus simplement possible ?*

ABCD est un carré inscrit dans un cercle de centre O.
A'B'C'D' est le carré image de ABCD par une rotation de centre O et d'angle α.

Pour de raisons de symétries évidentes, on peut supposer que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Alors ABCD est l'image de A'B'C'D' par une rotation de $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Alors A' appartient au petit arc AB, B' au petit arc BC, etc .. et B appartient au petit arc A'B', etc ..
Par conséquent AA'BB' est un quadrilatère convexe dont les diagonales [A'B'] et [AB] se coupent en un point.
Un raisonnement par permutation circulaire sur les sommets de l'octogone AA'BB'CC'DD' montre qu'il y a 8 points d'intersection.



Exercice 3 : *Le crible géométrique de Youri Matiiassevitch et Boris Stechkin.*

Soit la parabole P d'équation $x = y^2$ *, a et b deux entiers strictement positifs, A et B les points de P d'****ordonnées*** *respectives -a et b. La droite AB coupe l'axe des x en un point C (c, 0). Calculer c en fonction de a et b.*
Combien peut-on trouver de droites AB correspondant à c = 2 ? c = 15 ? c = 24 ? c premier ?
Pourquoi alors ce titre "Le crible ..." ?

Soit A(a^2;–a) et B(b^2 ; b) . Après calculs, on obtient une équation de (AB) : $y = \frac{1}{b-a}x - \frac{ab}{b-a}$.
Cette droite coupe l'axe des abscisses en C (ab ; 0). Donc c = ab.
Il y a donc autant de droites qui répondent à la question qu'il y a de diviseurs de c.
Pour c = 2, il y a 2 droites, pour c = 15, il y en a 4, pour $c = 24 = 2^3 \times 3^1$ il y en a $4\times2 = 8$.
Pour c premier, il y a deux droites.
C'est effectivement un crible, puisqu'il permet de discriminer les nombres premiers.

Exercice 4 : *n !! est par définition le produit de tous les* ***nombres premiers*** *inférieurs ou égaux à n.*
Résoudre l'équation n!! = 58!!
Par exemple : 58 !! = 2×3×5×7×11×13×17×19×23×31×37×41×43×47×53. (Ouf !)
Les deux nombres premiers qui encadrent 58 sont 53 et 59.
Les nombres n tels que n ! ! = 58 ! ! sont les nombres qui sont donc supérieurs ou égaux à 53 et strictement inférieurs à 59. Il s'agit donc de {53 ; 54 ; 55 ; 56 ; 57 ; 58}.

Exercice 5 : *Trouver cent nombres non premiers consécutifs. (J.Itard. Nombres premiers - Que Sais-Je ?)*
On pose A = 101 ! Les nombres A + 2 ; A + 3 ; A + 4 ; ... A + 100 ; A + 101 ne sont pas premiers puisque le premier est divisible par 2, le suivant par 3 et ainsi de suite, le dernier étant divisible par 101, et il forment donc une suite de 100 nombres consécutifs non premiers.

Exercice 6 : *On dispose des deux disques de même dimension. Le premier a ses deux faces noires et sera appelé* ***disque noir****, le deuxième a une face noire et une face étoilée et sera appelé* ***disque étoilé.*** *On prend les deux disques au hasard et, sans les regarder, on les pose l'un sur l'autre sur une table. On ne voit donc que la face du disque supérieur.*
Pour cette expérience, la face vue est noire. Le parieur A propose une mise de 1 F. sur le disque noir (il sera gagnant si le disque noir se trouve effectivement au - dessus). Combien proposeriez-vous en contre-partie sur le disque étoilé pour parier contre lui ? (Chantiers mathématiques RTS 2ème cycle 1965).

Notons 1 et 2 les faces du disque noir, 3 la face noire du disque étoilé et 4 la face étoilée.

La probabilité d'avoir le disque noir sachant que la face est noire est : $p_1 = P(\{1 ;2\}/\{1 ;2 ;3\}) = \frac{2}{3}$ et la probabilité qu'il s'agisse du disque étoilé, sachant toujours que la face est noire, est $p_2 = P(\{3\}/\{1 ; 2 ; 3)\} = \frac{1}{3}$. Soit x francs la mise proposée par le joueur B. Autrement dit A gagne 1 franc si le disque est noir (et B perd 1 franc) et A perd x francs que B gagne dans le cas contraire. L'espérance mathématique de A est $1 \times \frac{2}{3} - x \times \frac{1}{3}$. Elle est nulle si $x = 2$.

☞ Solution à l'exercice 1 (Corol'aire n° 48) - **Frédérick de Ligt.**

Énoncé (corrigé) : L'entier naturel n étant donné, trouver un couple (x,y) d'entiers vérifiant l'équation :
$x^2 - xy + y^2 = 273^n$. Par exemple, pour n = 5, on trouve (entre autres solutions) x = 1373616 , y = 368559.
Il s'agit de trouver un couple d'entiers (X,Y) vérifiant pour un entier n donné l'équation : $X^2 - XY + Y^2 = 273^n$ (1).
Si n est pair, on peut prendre $X = Y = 273^{n/2}$
Si n est impair, on remarque que le couple (19,8) est une solution de l'équation : $X^2 - XY + Y^2 = 273$. Par conséquent on peut choisir comme couple solution de (1) : $X = 19 \times 273^{(n-1)/2}$ et $Y = 8 \times 273^{(n-1)/2}$
<u>Remarque</u> : pour $n \geq 2$, si (X,Y) est un couple solution de (1) alors X et Y ne sont jamais premiers entre eux, car 3 divise X et Y.
Preuve : l'équation (1) peut se mettre sous la forme $(2X-Y)^2 + 3Y^2 = 4 \times 273^n$. Comme 3 divise 273 alors 9 divise 4×273^n dès que $n \geq 2$. Si 3 ne divise pas Y alors $Y^2 \equiv 1$ ou 4 ou 7 [9] et donc $3Y^2 \equiv 3$ [9] et l'on aboutit avec (1) à $(2X - Y)^2 \equiv 6$ [9] mais 6 n'est pas un carré modulo 9. C'est donc que 3 divise Y, mais alors $3Y^2 \equiv 0$ [9] et avec (1),
$(2X - Y)^2 \equiv 0$ [9] , $2X - Y \equiv 0$ [3] , $2X \equiv 0$ [3] , et donc 3 divise X.

☞ Solution à l'exercice 2 (Corol'aire n° 49) – **S. Parpay**

Énoncé : En quelle année a été donné l'exercice de bac ci-dessous ?
Soit un nombre X de quatre chiffres écrit avec les chiffres a, b, c et a dans cet ordre. Trouver X tel qu'il soit multiple de 7 et que son reste dans la division par 99 soit 1. (Ce texte avait été proposé par l'équipe Maths du Lycée Jean Macé de Niort.)
"Je ne dispose pas d'annales suffisamment anciennes pour dire en quelle année ce texte a été proposé au bac. Mais je suppose que c'est en 1981, car le nombre 1981 répond à la question". J. Drouglazet

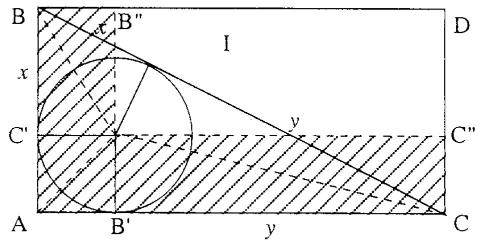
Le problème a bien été proposé au bac 1981.
1) Soit A = abca ; A ≡ 0 [7] (1) ; A ≡ 1 [99] . Donc A ≡ 1 [11] et A ≡ 1 [9] (2).
2) A = 1001a 100b + 10c = 7x11x13a + (9x11 + 1)b + (11 - 1)c
   A ≡ b - c [11]. Avec (2), on a : b - c ≡ 1 [11] (3)
   0 ≤ b ≤ 9 et 0 ≤ c ≤ 9 implique -9 ≤ b - c ≤ 9, et avec (3) : b - c = 1, soit b = c + 1.
3) A = 7x11x13a + (7x14 + 2)b + (7 + 3)c ; A ≡ 2b + 3c [7]. Avec (1), 2b + 3c ≡ 0 [7], et avec (4), 5c + 2 ≡ 0 [7], 5c - 5 ≡ 0 [7], c ≡1 [7] (5). Or 0 ≤ c ≤ 9 ; donc avec (5) et (4), c = 1 et b = 2, ou c = 8 ou b = 9.
4) A = (111x9 + 2)a = (11x9+ 1)b + (9 + 1)c. A ≡ 2a +b + c [99]. Avec (2), on a : 2a + b + c ≡ 1 [9] (7)
   Avec (4), 2(a + c) ≡ 0 [9], a + c ≡ 0 [9] (8). Or 1 ≤ a ≤ 9 ; donc avec (6), 1 ≤ c ≤ 8 et 2 ≤ a + c ≤ 17.
   Avec (8), a + c = 9.
5) Solutions : Avec (6) et (9) on a c = 1, b = 2 et a = 8, ce qui donne le nombre 8218, ou c = 8, b = 9 et a = 1, ce qui donne l'autre nombre 1981.

☞ Solution à l'exercice 3 (Corol'aire n° 49) – **J. Drouglazet**

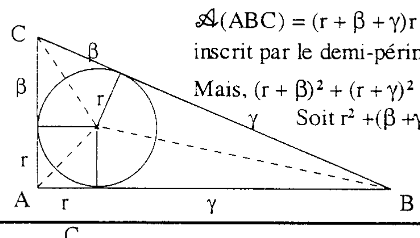
Énoncé : En complément de l'exercice n° 10 du Rallye "Le triangle de Poséidon" (voir dans le n°49).
Le point de contact I du cercle inscrit dans un triangle rectangle ABC d'hypoténuse BC partage cette hypoténuse en deux segments BI et IC. x et y étant les longueurs de ces segments, on démontre facilement par le calcul que l'aire du triangle ABC est égale à xy. Montrer géométriquement ce résultat (découpage du triangle en puzzle par exemple). *S.P.*

On décompose le triangle ABC en trois parties :
- Le quadrilatère BIOC', de surface équivalente à celle du triangle BC'OB'' (deux fois le triangle BC'O).
- Le quadrilatère CIOB', de surface équivalente à celle du rectangle CB'OC''.
- Le carré C'OB'A.

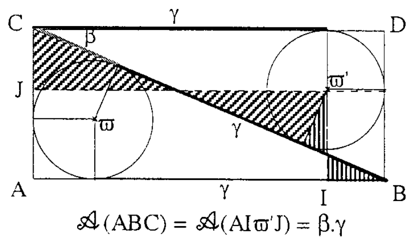
Le triangle ABC est donc équivalent au polygone hachuré. Comme la surface du triangle ABC représente la moitié de celle du rectangle ABDC, elle est équivalente à celle du rectangle B''DC''O.



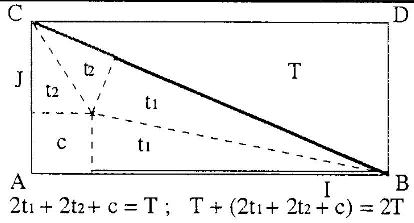
Autres solutions de S. Parpay :



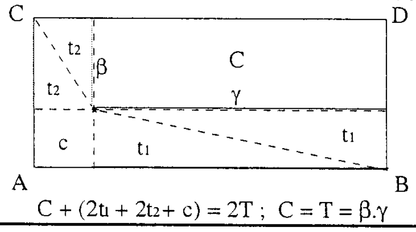
𝒜(ABC) = (r + β + γ)r (produit du rayon du cercle inscrit par le demi-périmètre du triangle.)
Mais, $(r + \beta)^2 + (r + \gamma)^2 = (\beta + \gamma)^2$ (Th. de Pythagore).
Soit $r^2 + (\beta + \gamma)r = \beta\gamma$; donc 𝒜(ABC) = βγ.



𝒜(ABC) = 𝒜(AIϖ'J) = β.γ



$2t_1 + 2t_2 + c = T$; $T + (2t_1 + 2t_2 + c) = 2T$



$C + (2t_1 + 2t_2 + c) = 2T$; $C = T = \beta.\gamma$