Edito

Tournons une page

Pour défendre, proposer un enseignement de qualité et être crédible, il faut, je pense, être très proche du terrain, rester en contact avec les élèves et la réalité. Etant passé dans la catégorie des non-actifs, je me dois de passer la main. Il faut dans le bureau des gens dynamiques et en exercice.

Je ne voudrais pas ici faire un bilan détaillé de ces dernières années, toutes les actions, dans une association comme la nôtre, sont collectives. Mais je voudrais souligner le plaisir que j'ai eu à travailler avec tout le comité et remercier toute l'équipe pour son soutien et la qualité de son travail.

Il est évident également, je peux le promettre à mon successeur, que je continuerai de participer, que je poursuivrai les actions que j'avais initiées et que je soutiendrai, dans la mesure de mes disponibilités, les manifestations (dans tous les sens du terme) du futur. Nous sommes effectivement inquiets : horaires, programmes, recrutement, formation ; il reste beaucoup de problèmes à régler.

Dernier clin d'œil, je termine mon mandat par l'édito du n° 50 de corol'aire, la dizaine est complète ; cela permettra au prochain président de débuter par un n° 1 (ou presque). Tout un symbole.

Merci encore à tous et bon courage à la nouvelle équipe.

J Citron

SOMMAIRE

Édito	p. 1
Vie associative : Comité	p. 2
Laurent Lafforgue : Médaille Fields	p. 2
Rallye Mathématique Poitou - Charentes	p. 3 à 5
Rubricol'age	p. 6 et 7
TPE en Terminale S (Daniel Daviaud)	p. 8

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

Octobre 2002 n° 50

COROL' AIRE

IREM, Fac. des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau,
86022 POITIERS CEDEX

ROUTAGE 206 DISPENSE DU TIMBRAGE POITIERS CENTRE DE TRI

APMEP : http://irem.univ-poitiers.fr/apmep
Mél : apmep@mathlabo.univ-poitiers.fr
Téléphone : 05 49 45 38 77 (IREM de Poitiers)

Le numéro : 1 E .
Abonnement 1 an (4 numéros) : 3,5 E.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur ..... Jackie CITRON
Comité de rédaction Colette BLOCH, Serge PARPAY, Jean FROMENTIN.
Imprimerie ..... IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
Editeur ..... APMEP Régionale de Poitiers
Siège social ..... IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P. ..... n° 73 802
Dépôt légal ..... Octobre 2002

Vie Associative

Compte rendu du Comité de la Régionale du 11 septembre 2002

Le comité de la Régionale a tenu sa première réunion de l'année scolaire 2002/2003 le mercredi 11 septembre dernier sous la présidence de J. Citron.

* Marie Parent a fait un compte rendu des débats du **Comité national de l'APMEP** de juin dernier où elle représente notre Régionale avec Cyrille Guiberteau (devenue Cyrille Kirch). Vous avez eu ces informations dans le BGV et le Bulletin Vert.

* Un tour de table a établi que la participation de notre Régionale aux **Journées Nationales de Rennes** est assurée. Il est toujours temps de s'y inscrire. Nous donnons rendez-vous à tous les participants de notre Régionale le samedi 26 octobre entre 14h et 15h, plage horaire prévue à cet effet. Le Comité a envoyé une lettre à chaque Inspecteur d'Académie lui demandant de porter à la connaissance des instituteurs et professeurs d'écoles la dispense des droits d'inscription à ces Journées pour ces personnels. En effet, une action importante en direction des enseignants des écoles pendant ces Journées nationales a été décidée à propos de la mise en place des nouveaux programmes de l'Élémentaire.

* Notre partenariat avec l'**Espace Mendès France** de Poitiers se poursuit encore cette année pour la venue de **conférenciers**. Retenez déjà les dates suivantes :

- Le mercredi 6 novembre, à 15h, à l'Espace Mendès France, **Géométrie des fortifications,** par **Frédéric Métin**, professeur de mathématiques, animateur à l'IREM de Dijon et membre de la commission Inter IREM " Histoire des mathématiques et épistémologie ". Photocopiez au format A3 l'affichette contenue dans ce Corol'aire et mettez-la en salle des professeurs. Des professeurs d'Histoire peuvent être intéressés par une telle conférence.
- Le mercredi 5 mars à 15h, à l'Espace Mendès France, **Dürer en son atelier... de géomètre** par **Jeanne Peiffer**, historienne des mathématiques au CNRS.

* L'**Assemblée Générale** de notre Régionale aura lieu à La Rochelle le mercredi 4 décembre. À cette occasion, Jacques CHAYÉ, professeur de mathématiques, ancien animateur à l'IREM de Poitiers et mélomane averti, nous entretiendra de la musique et des mathématiques : " **Gammes, Modes, Tempéraments... "**, avec démonstrations à l'appui, à l'IUFM de La Rochelle.

Vous recevrez les informations complémentaires en temps utile.

Au terme de cette réunion, il est signalé combien notre Régionale a été à l'honneur dans le Bulletin Vert n° 441 de l'APMEP avec les articles de Bernard Guennebaud, Daniel Daviaud et Louis Marie Bonneval, et dans le n° 42/43 " Spécial Rallyes " de la revue Hypercube avec la publication de l'épreuve Intermath en Rabelaisie, du Collège François Rabelais de Niort, et de l'épreuve du Rallye Mathématique Poitou-Charentes.

Image des mathématiques

Mathématiques des images

Journées Nationales de l'APMEP : RENNES les 26, 27 et 28 octobre 2002.

Laurent Lafforgue : un mathématicien français à l'honneur

Le 20 août dernier, à l'occasion du congrès international des mathématiciens à Pékin, Laurent Lafforgue, chercheur à l'IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques) a reçu la médaille Fields 2002, ainsi que l'Américain d'origine russe Vladimir Voevodsky. Rappelons que cette distinction, créée en 1923 par le mathématicien canadien J-C. Fields, est considérée comme l'équivalent du prix Nobel pour les autres disciplines. Parmi 44 lauréats, elle a récompensé sept Français, dont Laurent Schwartz, grande figure des mathématiques, disparu le 4 juillet dernier, et Alexander Grothendieck, le plus grand mathématicien du 20ème siècle selon Laurent Lafforgue.

Le travail de Laurent Lafforgue porte sur la théorie des nombres. Il se réfère aux idées du mathématicien canadien Robert Langlands, énoncées à la fin des années 1960, selon lesquelles «les nombres entiers se comportent comme s'ils étaient une courbe. Il est alors possible d'établir un véritable dictionnaire dans lequel un nombre premier correspond à un point d'une courbe, une fraction à une fonction définie sur une courbe ...».

Les intuitions géniales de Langlands ont permis de relier deux domaines jusqu'alors disjoints : le domaine algébrique (propriétés arithmétiques et algébriques des nombres) et l'analyse (les fonctions), permettant des découvertes spectaculaires.

Mais ce n'étaient que des conjectures. L'une de ces conjectures est devenue un théorème grâce aux travaux de l'Ukrainien Vladimir Drinfeld, qui a inventé pour cela les «chtoucas» (mot russe signifiant «truc»).

Laurent Lafforgue a généralisé les résultats de Drinfeld, réalisant ainsi un travail «extraordinaire», selon les spécialistes ...

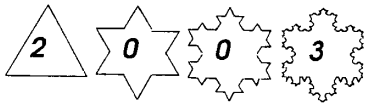
Même si le sujet reste un tantinet hermétique aux mathématiciens de base que nous sommes, c'est, me semble-t-il, l'occasion de montrer à nos élèves que les mathématiques sont une science vivante qui s'enrichit continuellement de découvertes nouvelles.

Louis-Marie BONNEVAL

Les serveurs de l'IREM et de l'APMEP

http://irem.univ-poitiers.fr/irem http://irem.univ-poitiers.fr/apmep

Rallye Mathématique Poitou-Charentes



L'équipe du Rallye Mathématique Poitou-Charentes a repris ses travaux le mercredi 25 septembre dernier. **Retenez déjà la date du Mardi 8 avril 2003**, jour de la prochaine épreuve du Rallye. Comme les années précédentes, vous recevrez courant janvier le matériel d'inscription au rallye avec une épreuve d'entraînement et les éléments de solutions. La date limite d'inscription est fixée au vendredi 14 février.

Nous ne pouvons que vous encourager à inscrire vos classes à une telle compétition. Nous observons en effet, de la part d'un certain nombre d'élèves, une nette désaffection, voire une opposition ouverte, à de telles activités mathématiques les mettant en situation de recherche. Essayons de maintenir le cap vers l'objectif essentiel de l'enseignement des mathématiques : la résolution de problèmes, et souhaitons recueillir de nombreux textes comme celui que nous publions ci-dessous, une " narration de recherche " particulièrement savoureuse.

Vous trouverez dans les pages centrales de ce Corol'aire, les éléments de solutions à l'épreuve de juin que nous avons publiée dans le numéro 49 de juillet dernier.

J. F.

C'est avec plaisir que nous publions cette réponse de la classe de Seconde 1 du Lycée Pilote Innovant de Jaunay-Clan au problème n° 11 : " Le 10-01 de 2002 ". L'originalité et l'humour font aussi partie des qualités recherchées à travers une telle épreuve.

Voici, récolté au péril de sa vie par notre envoyé spécial au LPI, des fragments du journal de bord d'un des participants au RALLYE MATHS du 18/04/02. Oui, mesdames et messieurs, LE rallye maths, LE vrai ! La fameuse épreuve internationale qui permet de faire connaître au monde les grands esprits de demain.
Mesdames et messieurs, ces documents sont exceptionnels et inédits. Pour la première fois de l'histoire, vous allez savoir ce qui passe par la tête d'un élève de seconde participant au RALLYE MATHS.

Recommandations : Ce document n'est utilisable que par un public averti. Nous avons conservé l'orthographe, le vocabulaire et la syntaxe du narrateur (NDLR : nous aussi). *Veuillez nous excuser par avance des erreurs éventuelles (en particulier celles mathématiques). La solution, la véritable, ne se trouve qu'à la fin. Merci et bonne lecture à tous !*

5H00 : Paris s'éveille.
7H20 : Je me lève. Il fait beau...
(ellipse temporelle)
15H30 : Ça y est, l'épreuve du RALLYE MATHS commence ! J'y suis enfin ! La destinée a voulu que je rencontre l'exercice n° 11... Oui, l'exercice 11, le seul, le vrai, l'unique, celui que j'ai toujours attendu...
15H32 : Première approche.
15H34 : J'ai pas tout compris, je relis.
15H40 : Début des calculs : Selon le texte, les nombres palindromes possibles sont situés entre 11 et 95. Il y a donc 95 - 11 = 84 possibilités pour les nombres.

Espace à louer : Tel : 06 42 66 24 60

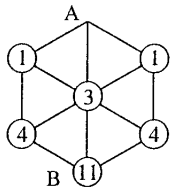
Les lettres à présent : Les lettres doubles représentent 26 - 3 = 23 possibilités pour chaque nombre. Je calcule le nombre de plaques d'immatriculation avec des lettres doubles : 84 x 23 = 1932.
Seulement, il faut y ajouter les plaques avec 3 lettres ! Cela représente le même nombre mais multiplié par 23. Ainsi j'ai 1 932 x 23 = 44 436.
Le calcul final (j'espère) : 1 932 + 44 436 = 46 268.
Voilà, ayé, c'est fini.
15H59 : Résultat 46 368.
16H05 : Euh...J'me suis trompé. J'ai relu l'énoncé, et j'ai vu que le premier et le dernier nombre de la plaque ne doivent pas être égaux ! Ça enlève des possibilités... (8 exactement : le 11, le 22, le 33, le 44, le 55, le 66, le 77 et le numéro complémentaire : le 88). Les possibilités pour les nombres sont ramenées à 84 - 8 = 76.
Je refais le calcul final : 76 x 23 + (76 x 23 x 23) = 41 952.
Ouf !
16H15 : Résultat : 41 952
16H15 et 34 sec : Le résultat devient officiel !
16H45 : Après avoir filé un coup de main aux autres, j'entame la rédaction. Ce sera long, mais je serai fort. Allez, c'est parti !
17H12 : Rédaction terminée ! (enfin). Je réponds à l'énoncé : " En France métropolitaine, le nombre d'immatriculations palindromes est de 41 952. " Je vais à présent vous les dessiner (non, j'plaisante ! ah ah !). Plus sérieusement, j'espère que le résultat est juste... Enfin bon, de toutes façons, j'aurais passé un bon moment ! Merci RALLYE MATHS !
N.B. : Ce message s'autodétruira dans 5 secondes...4...3...2...1...
(ah, désolé, ça marche pas. Tant pis.)

Eh oui, le résultat est faux. Mais, nous aussi, nous avons passé vraiment un bon moment et nous vous faisons partager ce plaisir.
Merci à cet élève, à son groupe et à sa classe.
L'erreur fatidique s'est produite entre 15H40 et 15H59. Si les nombres vont de 11 à 95, il n'y en a que 10 en moins, ceux de 1 à 10 ! (Mais non, pas la factorielle de 10...). Le calcul fait un peu avant 16H15 devient donc :
77 x 23 + (77 x 23 x 23) = 42 504, ce qui est la bonne réponse.
(NDLR) Mais au diable la bonne réponse avec une telle narration de recherche !

RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - 18 avril 2002

Éléments de solutions

(1) La goutte d'eau (5 points)

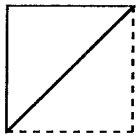


De proche en proche à partir du point A, nous avons mis à chaque nœud du réseau le nombre de chemins qui y aboutissent.
Il y a donc onze chemins possibles pour la goutte d'eau.

(2) Parfait ! (10 points)

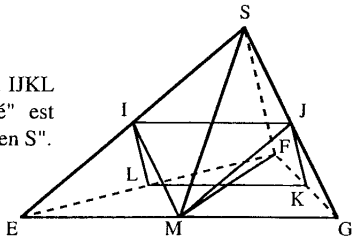
La décomposition de 2002 = 2 x 7 x 11 x 13 donne tout de suite une solution
2 + 7 + 11 + 13 = 33 ans.
Mais en faisant intervenir le facteur 1, on a 2002 = 1 x 2 x 7 x 11 x 13, et on obtient encore : 2002 = 1 x 11 x 13 x 14 = 1 x 7 x 13 x 22 = 1 x 7 x 11 x 26, les autres décompositions ne donnant pas des résultats plausibles pour la situation donnée, tant au niveau de l'âge des enfants que de celui du père.
Seule Béa Teument connaît, parmi les quatre âges possibles : 33, 39, 43 et 45, celui de Parfait Teument.

(3) Le tour de champ (10 points)



Le champ a la forme d'un triangle rectangle isocèle. Le carré construit sur les côtés de l'angle droit de ce triangle a donc une aire de 64 ha, c'est-à-dire 640000 m².
Les côtés de l'angle droit du champ triangulaire mesurent donc 800 m et l'hypoténuse mesure $800\sqrt{2}$ m, c'est-à-dire environ 1131 m.

(4) Pyramide (15 points)



Dans le tétraèdre SEFG, les quadrilatères SIMJ et IJKL sont des parallélogrammes. "SIMJ est un carré" est équivalent à "SEG est un triangle rectangle isocèle en S".

(SF) // (IL) et (IL) ⊥ (IJ) ; donc (SF) ⊥ (IJ).
(IJ) // (EG) ; donc (SF) ⊥ (EG). SEG étant un triangle rectangle isocèle, (SM) ⊥ (EG). Le plan (SMF) est donc perpe,diculaire à [EG] en son milieu M. (SMF) est le plan médiateur de[EG].
Par suite, FE = FG, et donc EFG est un triangle isocèle en F.
Restent les faces SFE et SFG qui sont deux triangles isométriques, la longueur du côté [SF] étant arbitraire, sous réserve de l'existence des triangles.

(7) Petite moyenne (15 points)

Chantal a fait 455 km à une vitesse moyenne de 91 km/h. Elle a donc roulé pendant 5 heures. Les quatre premières heures, elle a fait une vitesse moyenne de 105 km/h. Elle a donc parcouru une distance de 420 km.
La dernière heure, Chantal a donc parcouru seulement 35 km.

(8) Belinda et l'Euro (10 points)

7,22 F est une valeur arrondie par excès au centième près de 1,1 Euro.

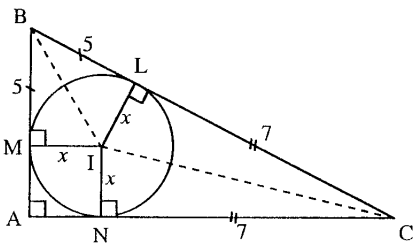
$\overline{xy,xy} \approx t \times \overline{z,z}$ avec $t \approx 6{,}55957$. $\overline{xy} \times 1{,}01 \approx z \times 1{,}1 \times 6{,}55957$.
$\overline{xy}/z \approx 7{,}144$. $\overline{xy}$ est donc voisin d'un multiple de 7. On trouve par essais successifs :
50.50 F ≈ 7,7 E, et c'est la seule solution.

(9) L'arbre de Noël (15 points)

Soit V_1 le volume d'un grand cône : $V_1 = \pi \times 6^2 \times 2x/3 = 24\pi x$.
Soit V_2 le volume d'un petit cône (partie emboîtée). Les dimensions de ce petit cône sont la moitié de celles du grand cône. Son volume est donc huit fois plus petit : $V_2 = 24\pi x/8 = 3\pi x$.
Le volume du cylindre est $V_3 = 4\pi x$. Le volume de l'arbre est donc :
$V = 4V_1 - 3V_2 + V_3 = 96\pi x - 9\pi x + 4\pi x = 91\pi x$. On a donc $91\pi x = 2002$.
En choisissant 22/7 pour π, on obtient :
$x = (2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 7)/(2 \times 7 \times 11 \times 13) = 7$ dm.
Donc la hauteur de l'arbre est $6x = 42$ dm = 4,2 m.

(10) Le triangle de Poséïdon (15 points)

☞ $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BLIM) + \mathcal{A}(CLIN) + \mathcal{A}(AMIN) = 5x + 7x + x^2 = x^2 + 12x$. (1)
$2\mathcal{A}(ABC) = (x + 5)(x + 7)$
$= x^2 + 12x + 35$ (2)
Par soustraction (2) - (1), on obtient :
$\mathcal{A}(ABC) = 35$ m².



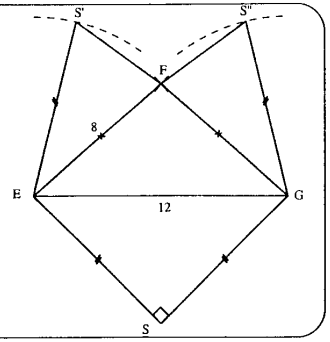
☞ La propriété de Pythagore appliquée au triangle ABC donne : $x^2 + 12x = 35$.
$2\mathcal{A}(ABC) = x^2 + 12x + 35 = 35 + 35$,
d'où le résultat.

(4) Pyramide (suite)

Pour construire un patron de cette pyramide :

- Triangle ESG rectangle et isocèle en S avec EG = 12.
- Triangle EFG isocèle en F tel que FE = FG = 8.
- Triangles S'FE et S''FG tels que S'E = S''G = SE.

S' et S'' sont donc sur les cercles de centres E et G, de rayon SE = SG, et tels que S'F = S''G.

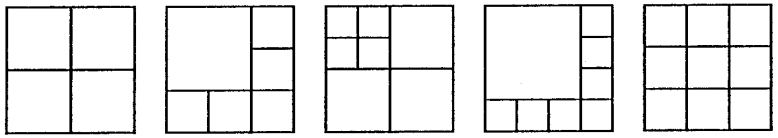


(5) Devinez ! (5 points)

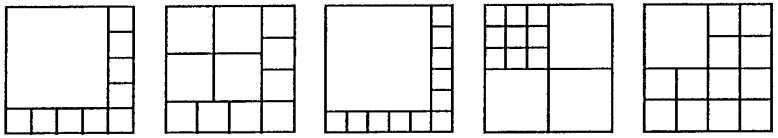
Les nombres de deux chiffres différents, inférieurs à 25 et premiers avec 9 sont : 10, 13, 14, 16, 17, 19, 20 et 23. Les palindromes correspondants sont donc :
1001, 1331, 1441, 1661, 1771, 1991, 2002 et 2332.

(6) Un carré de carrés (10 points)

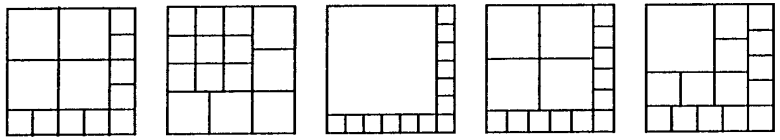
Nous donnons ci-dessous un échantillon des solutions trouvées. Un autre problème pourrait être de trouver le nombre de découpages différents, à une disposition près des carrés, pour un entier donné.



4 6 7 8 9



10 11 12 12 13



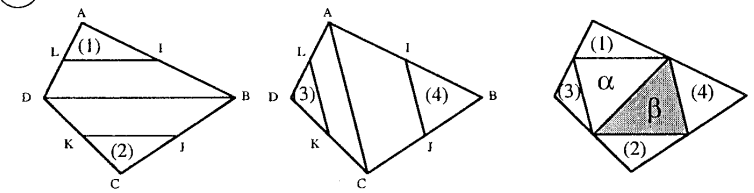
13 14 14 15 15

Compléments pour la classe de Seconde

(11) Le 10-01 de 2002 (10 points)

Le premier numéro étant plus grand ou égal à 11, les départements 01, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 et 90 dont les numéros symétriques sont 10, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08 et 09 ne peuvent pas avoir de palindrome (10 départements).
Le premier numéro ne peut pas être égal au numéro du département. Les départements 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77 et 88 ne peuvent donc pas avoir de palindrome (8 départements). 95 - 18 = 77. Ainsi, seuls 77 départements peuvent avoir un numéro d'immatriculation palindrome.
Les lettres I, O et U n'étant pas utilisées, seules 23 lettres sont disponibles. Il y a donc 23 combinaisons possibles à deux lettres (AA, BB, CC...) et 23 x 23 combinaisons possibles à trois lettres AAA, BAB, CAC...) ; donc 24 x 23 combinaisons à deux ou trois lettres.
Il y a donc 23 x 24 x 77 = **42 504 numéros d'immatriculation palindromes.**

(12) Le bichoco de Dominique (15 points)



☞ Soit $\mathcal{A}$ l'aire du quadrilatère ABCD. I, J, K et L étant les milieux des côtés de ABCD, (1) = $\mathcal{A}$(ALI) = 1/4 $\mathcal{A}$(ABD) et (2) = $\mathcal{A}$(CKJ) = 1/4 $\mathcal{A}$(CBD).

(1) + (2) = 1/4 $\mathcal{A}$. De même (3) + (4) = 1/4 $\mathcal{A}$.

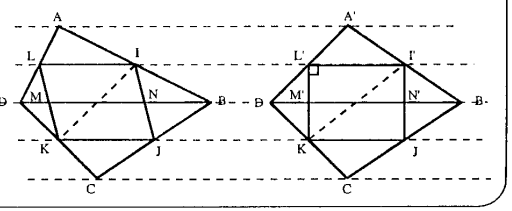
Donc (1) + (2) + (3) + (4) = 1/4 $\mathcal{A}$ + 1/4 $\mathcal{A}$ = 1/2 $\mathcal{A}$. $\alpha + \beta = 1/2\ \mathcal{A}$, et $\alpha = \beta$.

Donc $\beta = 1/4\ \mathcal{A}$.

La masse est proportionnelle au volume (les deux chocolats sont de même densité) qui lui-même est proportionnel à l'aire de la base (la friandise a la forme d'un prisme).
La masse totale de cette friandise est donc de 60 g.

☞ Par glissement (affinité), les aires sont toutes conservées (conservation des longueurs ou hauteurs).

Donc $\mathcal{A}$(IJK) = $\mathcal{A}$ (I'JK)
= 1/4 $\mathcal{A}$(A'BCD)
= 1/4 $\mathcal{A}$(ABCD)



RU - BRI - COL AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.

S. P.

☞ Solution aux exercices 2 à 6 (Corol'aire n° 47) – Louis Rivoallan.

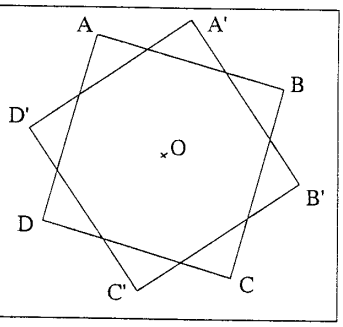
Exercice 2 : *Deux carrés ABCD et A'B'C'D' ont leurs côtés égaux et de même centre. Leurs côtés se coupent en huit points, c'est évident ! Mais comment le montrer le plus simplement possible ?*

ABCD est un carré inscrit dans un cercle de centre O.
A'B'C'D' est le carré image de ABCD par une rotation de centre O et d'angle α.

Pour de raisons de symétries évidentes, on peut supposer que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Alors ABCD est l'image de A'B'C'D' par une rotation de $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Alors A' appartient au petit arc AB, B' au petit arc BC, etc .. et B appartient au petit arc A'B', etc ..
Par conséquent AA'BB' est un quadrilatère convexe dont les diagonales [A'B'] et [AB] se coupent en un point.
Un raisonnement par permutation circulaire sur les sommets de l'octogone AA'BB'CC'DD' montre qu'il y a 8 points d'intersection.



Exercice 3 : *Le crible géométrique de Youri Matiiassevitch et Boris Stechkin.*

*Soit la parabole P d'équation $x = y^2$, a et b deux entiers strictement positifs, A et B les points de P d'**ordonnées** respectives -a et b. La droite AB coupe l'axe des x en un point C (c, 0). Calculer c en fonction de a et b.*
Combien peut-on trouver de droites AB correspondant à c = 2 ? c = 15 ? c = 24 ? c premier ?
Pourquoi alors ce titre "Le crible ..." ?

Soit A(a^2;-a) et B(b^2 ; b) . Après calculs, on obtient une équation de (AB) : $y = \frac{1}{b-a}x - \frac{ab}{b-a}$.

Cette droite coupe l'axe des abscisses en C (ab ; 0). Donc c = ab.
Il y a donc autant de droites qui répondent à la question qu'il y a de diviseurs de c.
Pour c = 2, il y a 2 droites, pour c = 15, il y en a 4, pour $c = 24 = 2^3 \times 3^1$ il y en a 4×2 = 8.
Pour c premier, il y a deux droites.
C'est effectivement un crible, puisqu'il permet de discriminer les nombres premiers.

Exercice 4 : *n !! est par définition le produit de tous les **nombres premiers** inférieurs ou égaux à n.*
Résoudre l'équation n!! = 58!!
Par exemple : 58 !! = 2×3×5×7×11×13×17×19×23×31×37×41×43×47×53. (Ouf !)
Les deux nombres premiers qui encadrent 58 sont 53 et 59.
Les nombres n tels que n ! ! = 58 ! ! sont les nombres qui sont donc supérieurs ou égaux à 53 et strictement inférieurs à 59.
Il s'agit donc de {53 ; 54 ; 55 ; 56 ; 57 ; 58}.

Exercice 5 : *Trouver cent nombres non premiers consécutifs. (J.Itard. Nombres premiers - Que Sais-Je ?)*
On pose A = 101 ! Les nombres A + 2 ; A + 3 ; A + 4 ; ... A + 100 ; A + 101 ne sont pas premiers puisque le premier est divisible par 2, le suivant par 3 et ainsi de suite, le dernier étant divisible par 101, et il forment donc une suite de 100 nombres consécutifs non premiers.

Exercice 6 : *On dispose des deux disques de même dimension. Le premier a ses deux faces noires et sera appelé **disque noir**, le deuxième a une face noire et une face étoilée et sera appelé **disque étoilé**. On prend les deux disques au hasard et, sans les regarder, on les pose l'un sur l'autre sur une table. On ne voit donc que la face du disque supérieur.*
Pour cette expérience, la face vue est noire. Le parieur A propose une mise de 1 F. sur le disque noir (il sera gagnant si le disque noir se trouve effectivement au - dessus). Combien proposeriez-vous en contre-partie sur le disque étoilé pour parier contre lui ? (Chantiers mathématiques RTS 2ème cycle 1965).

Notons 1 et 2 les faces du disque noir, 3 la face noire du disque étoilé et 4 la face étoilée.

La probabilité d'avoir le disque noir sachant que la face est noire est : $p_1 = P(\{1;2\}/\{1;2;3\}) = \frac{2}{3}$ et la probabilité qu'il s'agisse du disque étoilé, sachant toujours que la face est noire, est $p_2 = P(\{3\}/\{1;2;3\}) = \frac{1}{3}$. Soit x francs la mise proposée par le joueur B. Autrement dit A gagne 1 franc si le disque est noir (et B perd 1 franc) et A perd x francs que B gagne dans le cas contraire. L'espérance mathématique de A est $1 \times \frac{2}{3} - x \times \frac{1}{3}$. Elle est nulle si $x = 2$.

☞ Solution à l'exercice 1 (Corol'aire n° 48) - Frédérick de Ligt.

Énoncé (corrigé) : L'entier naturel n étant donné, trouver un couple (x,y) d'entiers vérifiant l'équation :
$x^2 - xy + y^2 = 273^n$. Par exemple, pour n = 5, on trouve (entre autres solutions) x = 1373616 , y = 368559.
Il s'agit de trouver un couple d'entiers (X,Y) vérifiant pour un entier n donné l'équation : $X^2 - XY + Y^2 = 273^n$ (1).
Si n est pair, on peut prendre $X = Y = 273^{n/2}$
Si n est impair, on remarque que le couple (19,8) est une solution de l'équation : $X^2 - XY + Y^2 = 273$. Par conséquent on peut choisir comme couple solution de (1) : $X = 19 \times 273^{(n-1)/2}$ et $Y = 8 \times 273^{(n-1)/2}$
Remarque : pour $n \geq 2$, si (X,Y) est un couple solution de (1) alors X et Y ne sont jamais premiers entre eux, car 3 divise X et Y.
Preuve : l'équation (1) peut se mettre sous la forme $(2X-Y)^2 + 3Y^2 = 4 \times 273^n$. Comme 3 divise 273 alors 9 divise 4×273^n dès que $n \geq 2$. Si 3 ne divise pas Y alors $Y^2 \equiv 1$ ou 4 ou 7 [9] et donc $3Y^2 \equiv 3$ [9] et l'on aboutit avec (1) à $(2X - Y)^2 \equiv 6$ [9] mais 6 n'est pas un carré modulo 9. C'est donc que 3 divise Y, mais alors $3Y^2 \equiv 0$ [9] et avec (1),
$(2X - Y)^2 \equiv 0$ [9] , $2X - Y \equiv 0$ [3] , $2X \equiv 0$ [3] , et donc 3 divise X.

☞ Solution à l'exercice 2 (Corol'aire n° 49) – S. Parpay

Énoncé : En quelle année a été donné l'exercice de bac ci-dessous ?
Soit un nombre X de quatre chiffres écrit avec les chiffres a, b, c et a dans cet ordre. Trouver X tel qu'il soit multiple de 7 et que son reste dans la division par 99 soit 1. (Ce texte avait été proposé par l'équipe Maths du Lycée Jean Macé de Niort.)
"Je ne dispose pas d'annales suffisamment anciennes pour dire en quelle année ce texte a été proposé au bac. Mais je suppose que c'est en 1981, car le nombre 1981 répond à la question". J. Drouglazet

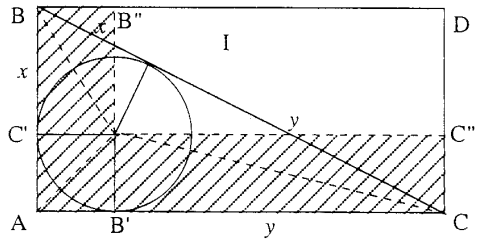
Le problème a bien été proposé au bac 1981.
1) Soit A = abca ; $A \equiv 0$ [7] (1) ; $A \equiv 1$ [99] . Donc $A \equiv 1$ [11] et $A \equiv 1$ [9] (2).
2) $A = 1001a\ 100b + 10c = 7x11x13a + (9x11 + 1)b + (11 - 1)c$
$A \equiv b - c$ [11]. Avec (2), on a : $b - c \equiv 1$ [11] (3)
$0 \leq b \leq 9$ et $0 \leq c \leq 9$ implique $-9 \leq b - c \leq 9$, et avec (3) : $b - c = 1$, soit $b = c + 1$.
3) $A = 7x11x13a + (7x14 + 2)b + (7 + 3)c$; $A \equiv 2b + 3c$ [7]. Avec (1), $2b + 3c \equiv 0$ [7], et avec (4), $5c + 2 \equiv 0$ [7], $5c - 5 \equiv 0$ [7], $c \equiv 1$ [7] (5). Or $0 \leq c \leq 9$; donc avec (5) et (4), $c = 1$ et $b = 2$, ou $c = 8$ ou $b = 9$.
4) $A = (111x9 + 2)a = (11x9 + 1)b + (9 + 1)c$. $A \equiv 2a + b + c$ [99]. Avec (2), on a : $2a + b + c \equiv 1$ [9] (7)
Avec (4), $2(a + c) \equiv 0$ [9], $a + c \equiv 0$ [9] (8). Or $1 \leq a \leq 9$; donc avec (6), $1 \leq c \leq 8$ et $2 \leq a + c \leq 17$.
Avec (8), $a + c = 9$.
5) Solutions : Avec (6) et (9) on a $c = 1$, $b = 2$ et $a = 8$, ce qui donne le nombre 8218, ou $c = 8$, $b = 9$ et $a = 1$, ce qui donne l'autre nombre 1981.

☞ Solution à l'exercice 3 (Corol'aire n° 49) – J. Drouglazet

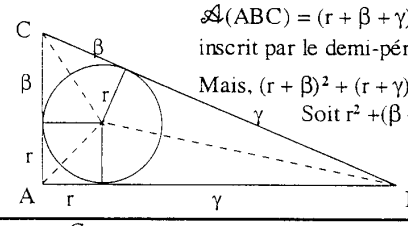
Énoncé : En complément de l'exercice n° 10 du Rallye "Le triangle de Poséidon" (voir dans le n°49).
Le point de contact I du cercle inscrit dans un triangle rectangle ABC d'hypoténuse BC partage cette hypoténuse en deux segments BI et IC. x et y étant les longueurs de ces segments, on démontre facilement par le calcul que l'aire du triangle ABC est égale à xy. Montrer géométriquement ce résultat (découpage du triangle en puzzle par exemple). S.P.

On décompose le triangle ABC en trois parties :
- Le quadrilatère BIOC', de surface équivalente à celle du triangle BC'OB'' (deux fois le triangle BC'O).
- Le quadrilatère CIOB', de surface équivalente à celle du rectangle CB'OC''.
- Le carré C'OB'A.

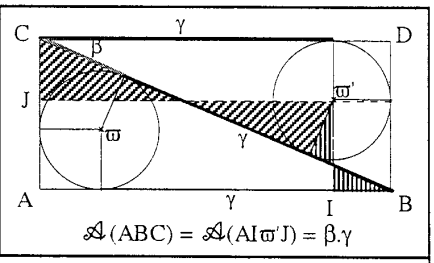
Le triangle ABC est donc équivalent au polygone hachuré. Comme la surface du triangle ABC représente la moitié de celle du rectangle ABDC, elle est équivalente à celle du rectangle B''DC''O.



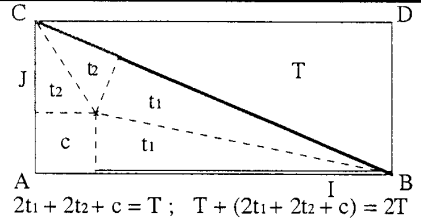
Autres solutions de S. Parpay :



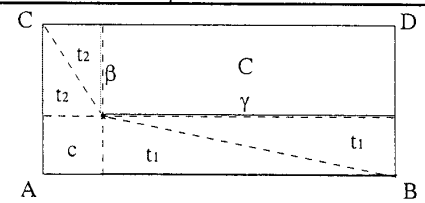
$\mathcal{A}(ABC) = (r + \beta + \gamma)r$ (produit du rayon du cercle inscrit par le demi-périmètre du triangle.)
Mais, $(r + \beta)^2 + (r + \gamma)^2 = (\beta + \gamma)^2$ (Th. de Pythagore).
Soit $r^2 + (\beta + \gamma)r = \beta\gamma$; donc $\mathcal{A}(ABC) = \beta\gamma$.



$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AI\varpi'J) = \beta.\gamma$



$2t_1 + 2t_2 + c = T$; $T + (2t_1 + 2t_2 + c) = 2T$



$C + (2t_1 + 2t_2 + c) = 2T$; $C = T = \beta.\gamma$

Après deux ans de TPE - juin 2002
Mathématiques et TPE : une lutte contre l'exclusion

par Daniel DAVIAUD, professeur de mathématiques au lycée de Jonzac

On entend dire que les maths ont du mal à trouver leur place dans les TPE ; et même en série S, les sujets faisant appel aux maths sont nettement minoritaires.

Certaines explications tendent à culpabiliser les profs de maths qui :

- par conservatisme, rechigneraient à se lancer dans les TPE,
- par orgueil, refuseraient de voir leur matière réduite au rang de discipline de service.

Nous devons récuser sans vergogne ces arguments et surtout ne pas les intérioriser. Même en admettant que certains collègues puissent être conservateurs ou orgueilleux, cela n'expliquerait pas que les maths désertent aussi massivement les TPE.

Et pourquoi les matheux seraient-ils plus conservateurs que les autres ?

Et pourquoi les matheux ne comprendraient-ils pas qu'un travail interdisciplinaire conduisant à étudier une fonction, une suite, une figure géométrique, etc., donne l'occasion de faire d'aussi nobles mathématiques qu'un problème commençant brutalement par " Soit une fonction f", " Soit une suite (u_n)" ou " Soit un triangle ABC" ?

Il serait sûrement plus intéressant de se demander si les directives ministérielles ou rectorales qui encadrent la mise en place des TPE et en particulier le choix des sujets (Textes du B.O., commentaires, stages ...) ne sont pas les principaux responsables de l'éviction des maths.

Pour être clair, je pense qu'il y a, dans le cadrage des TPE, des éléments qui contribuent sournoisement mais objectivement à l'exclusion des maths. Je vais en détailler trois exemples.

1) Les directives officielles ne sont pas neutres.

J'ai déjà expliqué, (voir Corol'aire n° 46 de septembre 2002) qu'avec des élèves standard, le prof de maths ne peut pas se contenter de " prodiguer des recommandations, avis et conseils " (B.O. de 11/01/2001). Car les élèves sont encore étrangers à toute démarche de mathématisation ou de modélisation. Souvent aussi, ils sont incapables de comprendre seuls un texte mathématique.

Ceci amène le prof de maths à intervenir très activement, et généralement à rédiger un document qui donne (ou qui fait découvrir) des outils et montre comment s'en servir. Pourquoi ? Parce qu'en TPE comme en cours, les élèves sont en situation d'apprentissage (sauf peut-être si l'on se cantonne à des calculs de proportionnalité). Et on doit rédiger, car des explications purement orales sont inefficaces.

Ainsi le prof de maths est placé devant un dilemme. Ou bien il respecte à la lettre le texte du B.O., et les élèves ne font rien. Ou bien il travaille pour être à la hauteur de la situation, et il se retrouve alors exploité car sous-payé.

2) Les thèmes ne sont pas neutres.

Certains thèmes évoquent directement les sciences physiques ou naturelles : Eau, Images, Risques naturels et technologiques, Sciences et aliments. Ces thèmes conduisent les élèves à proposer spontanément des sujets et des problématiques incluant la physique, la chimie, la géologie ou la biologie, mais exceptionnellement les mathématiques.

Les autres thèmes apparaissent plus vagues ou plus abstraits : Croissance, Temps, rythmes et périodes, Espace et mouvement, Ordre et désordre. Les élèves préfèrent les éviter, ne voyant pas de contenu, et pressentant que ce sera très " prise de tête ".

Ainsi le prof de maths est placé devant un autre dilemme. Ou bien il laisse les élèves définir sujets et problématiques... et exit les maths. Ou bien il s'investit hardiment dans la définition des sujets en révélant aux élèves que telle ou telle question peut donner lieu à une mathématisation intéressante.

Il s'aperçoit alors que c'est toujours lui qui vient aider les élèves à mathématiser des sujets qui s'inscrivent sans effort dans une autre discipline. En revanche, le physicien et le naturaliste ne viennent jamais aider les élèves à physiquer, à chimiser ou à biologiser un sujet mathématique.

D'ailleurs ces verbes-là n'existent pas : cela souligne que la relation entre maths et autres matières n'est pas symétrique.

On constate ainsi que les maths sont ségréguées par la liste des thèmes ; et les sous-thèmes ne valent pas mieux. Il manque des thèmes évoquant directement des contenus mathématiques : transformations géométriques, suites récurrentes, variations de fonctions, courbes, trigonométrie, géométrie dans l'espace, jeux de hasard, équations différentielles, nombre d'or ... ? Alors, on se demanderait avec quelle autre science ils peuvent fonctionner. Et ceci contribuerait à rétablir l'équilibre des disciplines.

3) Les stages de formation ne sont pas neutres.

J'ai participé à un stage intitulé " Définir le sujet et la problématique d'un projet ". Le point de départ de la méthode préconisée est le thème (choisi ou imposé). Ensuite, les élèves doivent " mobiliser des idées ", se demander s'il existe un rapport entre le thème et eux, entre le thème et leur environnement, entre le thème et les questions qu'ils se posent et dont ils n'ont pas la réponse, etc. Ils s'interrogeront aussi sur les ressources documentaires disponibles dans leur établissement.

N'est-il pas clair qu'avec de tels procédés, les élèves ne peuvent produire que ce qu'ils ont déjà en eux ou tout près d'eux ? Comment pourraient-ils imaginer de traiter un sujet autrement que ne le font la presse grand public (descriptions et questions banales) et les manuels scolaires (exposés monodisciplinaires) ? Comment pourraient-ils, au moyen de ce remue-méninges naïf, élaborer des questions dont le traitement fasse appel aux maths et qui soient :

- assez difficiles pour ne pas avoir de réponse triviale,
- assez faciles pour que les connaissances mathématiques d'un lycéen soient efficaces ?

A titre d'illustration, la collègue animatrice a montré un tableau bidisciplinaire de 12 sujets choisis en série S dans son lycée : 10 sujets faisaient appel à la physique, 10 aux SVT et 4 aux maths. Éloquent !

Cultiver de cette façon l'autonomie des élèves, n'est-ce pas, d'une certaine manière, renoncer à les faire évoluer, et, faisant d'une pierre deux victimes, évincer les maths ?

Ce genre de stage peut avoir le mérite de déclencher une réflexion critique ; il peut aussi avoir un effet contre productif si les stagiaires le reçoivent passivement.

Je ne dis pas que les mathématiques sont victime d'une intention discriminatoire. Mais faire vivre les maths dans les TPE actuels, c'est véritablement lutter contre l'exclusion.

Nous poursuivrons la publication des cinq autres sujets que nous a envoyés Daniel Daviaud dans les prochains Corol'aires.