

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.

S.P.



Exercice (Jacques DROUGLAZET, Surgères) :

On a élevé au cube une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients entiers et on a obtenu la matrice ci-contre. Quelle était cette matrice ?

54	- 538	- 817
20	353	538
259	- 20	54



Exercice : En quelle année a été donné l'exercice de bac ci-dessous ?

Soit un nombre X de quatre chiffres écrit avec les chiffres a, b, c et a dans cet ordre. Trouver X tel qu'il soit multiple de 7 et que son reste dans la division par 99 soit 1.



Exercice en complément de l'exercice du rallye "Le triangle de Poséidon" (voir dans ce même n°).

Le point de contact I du cercle inscrit dans un triangle rectangle ABC d'hypoténuse BC partage cette hypoténuse en deux segments BI et IC. x et y étant les longueurs de ces segments, on démontre facilement par le calcul que l'aire du triangle ABC est égale à x.y. Montrer géométriquement ce résultat (découpage du triangle en puzzle par exemple).

S.P.

Une réponse à cet exercice sera donnée dans le prochain n°. Nous attendons la vôtre !



Le moulin de Louis Rivoallan (Corollaire n° 40)

Une solution de Serge Parpay

Nous rappelons l'énoncé :

À l'intérieur d'un disque C de centre O, on prend un point quelconque I et on trace deux droites (d) et (d') perpendiculaires en I.

On fait tourner ces droites d'un angle α , $0 < \alpha < \pi/2$. Au cours de cette rotation les droites (d) et (d') balayent une partie du disque. Montrer que l'aire de cette zone est indépendante de I et exprimer cette aire en fonction de α .

a) Soit un cercle de centre O, un point I intérieur au cercle et deux cordes AC et BD perpendiculaires et passant par I. $IA^2 + IB^2 = AB^2$ et $IC^2 + ID^2 = CD^2$.

La parallèle à (BD) passant par A coupe le cercle en A'. Le quadrilatère ABDA' est un trapèze isocèle (propriété classique) ; donc angle (ABD) = angle (BDA').

Angle (CAB) = angle (CDB) (même arc intercepté sur le cercle). En conséquence,

angle (CDA') = angle (CDB) + angle (BDA') = angle (CAB) + angle (ABD) = 1 droit, puisque le triangle AIB est rectangle. [CA'] est un diamètre du cercle :

$CD^2 + DA'^2 = CA'^2 = 4R^2$ et aussi $CD^2 + BA^2 = 4R^2$.

Par suite $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$.

b) La droite (d) coupe le cercle en A et C, la droite (d') coupe le cercle en B et D (figure ci-contre). (d) et (d') sont perpendiculaires.

On choisit un axe de coordonnées polaires Ix , les angles étant mesurés en radians.

La figure (IA, IB, IC, ID) est parfaitement déterminée par $t = (Ix, IA)$.

En posant $IA = a$, $IB = b$, $IC = c$, $ID = d$; a, b, c et d sont fonctions de t.

La figure (IA, IB, IC, ID) tournant d'un angle θ à partir de la position initiale $t = 0$, l'aire balayée par les segments IA, IB, IC, ID sera égale à :

$$\mathcal{A}(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) dt, \text{ soit } \mathcal{A}(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{2} 4R^2 dt, \text{ soit } \mathcal{A}(\theta) = 2R^2\theta.$$

Seulement fonction de l'angle de rotation des "ailes du moulin", l'aire balayée est indépendante de la position du point I dans le disque.

En particulier quand les ailes tournent d'un angle droit toute la surface du disque est couverte ; on retrouve bien, en appliquant la formule obtenue ci-dessus, l'aire du disque : πR^2 .

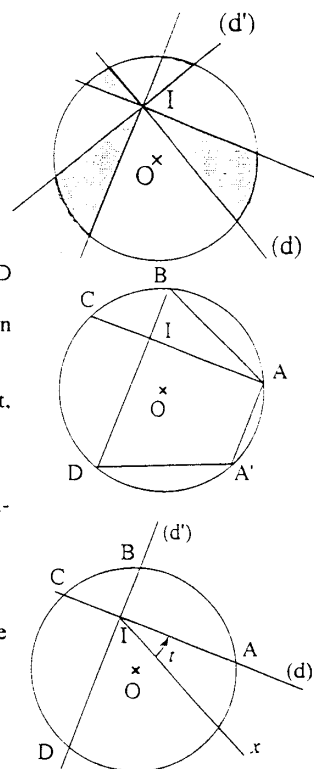


Un correctif.

Jacques Drouglazet nous signale "une petite erreur de transcription" dans le premier de ses exercices publiés dans le dernier Corollaire (n° 48). Voici l'énoncé corrigé : L'entier naturel n étant donné, trouver un couple (x, y) d'entiers vérifiant l'équation : $x^2 - xy + y^2 = 273^n$. Par exemple, pour $n = 5$, on trouve (entre autres solutions) $x = 1373616$, $y = 368559$.

Nous publierons, dans le prochain Corollaire, une solution de Frédéric de Ligt à ce problème.

Par ailleurs, le problème du tétraèdre passionne toujours autant. Nous publions deux autres solutions, de Jean-Christophe Laugier et d'Alain Pichereau.



Solution à l'exercice 1 (Corol'aire n° 47) - Alain Pichereau.

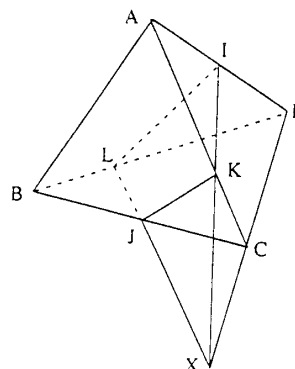
Énoncé : Tout plan P passant par les milieux I et J de deux côtés opposés $[AD]$ et $[BC]$ d'un tétraèdre partage ce dernier en deux parties de même volume.

1^{er} cas : P passe par un des sommets du tétraèdre.

Si P passe par A ou D alors $P = (ADJ)$ et le tétraèdre est partagé en deux tétraèdres $BADJ$ et $CADJ$ qui ont même volume car $d(B, P) = d(C, P)$ puisque le milieu de $[BC]$ est sur P . Conclusion analogue si P passe par B ou C .

2^{ème} cas : P ne passe par aucun des sommets du tétraèdre.

P va donc couper le plan (ADC) selon une droite passant par I (et ne passant ni par A , ni par D , ni par C) : cette droite va couper soit $]AC[$, soit $]CD[$. On supposera ici que P coupe $]AC[$ en un point K (si c'est $]CD[$ qui est coupé en K , par échange de A et D on se ramène au cas précédent).



Précisons le point d'intersection de P avec la droite (BD) .

Si K est le milieu de $[AC]$, alors, en notant L le milieu de $[BD]$, on a $(LJ) \parallel (CD) \parallel (KI)$ donc les quatre points L, J, K et I sont coplanaires et L est dans le plan (IKJ) , ainsi L est sur P et (BD) , et c'est donc le point d'intersection de P et (BD) $[(BD)$ ne peut être dans P car alors B, D, I et J , et donc A, B, C et D seraient coplanaires].

La section est donc dans ce cas un parallélogramme $LJKI$, le plan P étant parallèle à (AB) et (CD) .

Si K n'est pas le milieu de $[AC]$, alors (IK) et (CD) qui sont deux droites non parallèles de (ACD) se coupent en un point X situé en dehors de $[CD]$. (XJ) qui est une droite de (BCD) ne peut être parallèle à (BD) , sinon (XJ) couperait $[CD]$ en son milieu Z et les droites (XJ) et (CD) auraient deux points distincts en commun (X et Z) et donc $(XJ) = (CD)$, soit J sur (CD) , ce qui est exclu. Par conséquent, (JX) et (BD) se coupent en un point L qui est le point d'intersection de P et (BD) . Bien entendu, en notant Y le point d'intersection de (JK) et (AB) , L est le point d'intersection de (YL) et (BD) .

Montrons que l'on a toujours : $AK/AC = DL/DB$.

Si K est le milieu de $[AC]$, c'est évident car L est alors le milieu de $[BD]$.

Sinon, par application de Ménélaus (version distance) dans ACD aux points alignés X, K et T , et dans BCD aux points alignés X, J et L , on obtient $(XD/XC)(KC/KA)(IA/ID) = 1$ et $(XD/XC)(JC/JB)(LB/LD) = 1$. Compte tenu que $IA/ID = JC/JB = 1$ on obtient $KA/LD = KC/LB$, quantité égale aussi à $(KA+KC)/(LD+LD) = AC/BD$ et finalement on a $AK/AC = DL/DB$.

Il ne reste plus qu'à montrer que les deux parties obtenues : Pa_1 , le "pseudo-prisme" de base $LJKI$ et d'arête latérale $[AB]$, et Pa_2 , le "pseudo-prisme" de base $LJKI$ et d'arête latérale $[CD]$, ont même volume.

$\text{Volume}(Pa_1) = \text{Volume}(\text{pyramide de sommet } B \text{ et base } LJKI) + \text{Volume}(BAIK)$

$\text{Volume}(Pa_2) = \text{Volume}(\text{pyramide de sommet } C \text{ et base } LJKI) + \text{Volume}(CDIL)$

Les deux pyramides ont le même volume puisque $d(B, P) = d(C, P)$, le milieu J de $[BC]$ étant sur P .

Notons V le volume du tétraèdre $ABCD$.

$\text{Volume}(BAIK) = d(B, (ACD)) \cdot \text{aire}(AIK)/3 = V \cdot \text{aire}(AIK)/\text{aire}(ACD) = V \cdot AI \cdot AK/(AC \cdot AD) = V \cdot (AK/AC)/2$ (cela en utilisant deux fois le fait que l'aire d'un triangle est $bc(\sin A)/2$).

De même, $\text{Volume}(CDIL) = d(C, (DBA)) \cdot \text{aire}(DIL)/3 = V \cdot \text{aire}(DIL)/\text{aire}(DBA) = V \cdot (DL/DB)/2$ et donc d'après la relation $AK/AC = DL/DB$ on a $\text{Volume}(Pa_1) = \text{Volume}(Pa_2)$.

Deux remarques :

- Si K est le milieu de $[AC]$ alors $\text{Volume}(BAIK) = \text{Volume}(CDIL) = V/4$ et les deux pyramides évoquées ci-dessus ont chacune pour volume $V/4$.

- On peut démontrer que le milieu de $[LK]$ est toujours sur $[IJ]$.

Solution à l'exercice 1 (Corol'aire n° 47) - Jean-Christophe Laugier.

Soit un tétraèdre $ABCD$, I le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[BC]$. Le plan (P) passant par I et J coupe $[AB]$ en M et $[CD]$ en M' . Chacun des deux solides déterminés par (P) se décompose en une pyramide et un tétraèdre :

* Celui possédant les sommets B et D en la pyramide P_1 de base $IMJM'$ et de sommet D et le tétraèdre T_1 de sommet D et de base BMJ .

* Celui possédant les sommets A et C en la pyramide P_2 de base $IMJM'$ et de sommet A et le tétraèdre T_2 de sommet A et de base JCM' .

Il est clair que P_1 et P_2 ont même volume : elles ont une base commune et même hauteur puisque I est le milieu de $[AD]$. Il reste donc à prouver que T_1 et T_2 ont même volume.

Soit O le point d'intersection éventuellement rejeté à l'infini des droites (IM') et (MJ) . O est sur (AC) . Le théorème de Ménélaus appliqué au triangle ACD avec la transversale $IM'O$ fournit, en mesures algébriques :

$(OA/OC) \times (M'C/M'D) \times (ID/IA) = 1$. Le même théorème appliqué au triangle ABC avec la transversale MJO fournit, en mesures algébriques : $(MA/MB) \times (JB/JC) \times (OC/OA) = 1$.

Des deux égalités précédentes, il résulte que : $MA/MB = M'D/M'C$ car $ID/IA = JB/JC = -1$ (toujours en mesures algébriques), et donc $MB/AB = M'C/CD$.

Or $\text{Vol}(T_1)/\text{Vol}(ABCD) = \text{Aire}(BMJ)/\text{Aire}(ABC) = (1/2) \times (MB/AB)$.

$\text{Vol}(T_2)/\text{Vol}(ABCD) = \text{Aire}(CM'J)/\text{Aire}(BCD) = (1/2) \times (M'C/CD)$. On a donc bien $\text{Vol}(T_1) = \text{Vol}(T_2)$.

