RU - BRI - COL - LAGES	Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur, ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci !

S. P.

☞ Exercices :

De notre collègue J. Drouglazet (Surgères).

1) L'entier naturel n étant donné, trouver un couple (x, y) d'entiers vérifiant l'équation : $x^2 - xy + y^2 = 273^3$.
Par exemple, pour n = 5, on trouve (entre autres solutions) $x = 1373616$, $y = 368559$.

2) On désigne par a et b les racines de l'équation $x^2 - 12x + 4 = 0$. Trouver deux nombres <u>rationnels</u> x et y tels que

$$\int_1^a \frac{5t+7}{t^3+t^2-0{,}1}\,dt + \int_1^b \frac{5t+7}{t^3+t^2-0{,}1}\,dt = \int_x^y \frac{5t+7}{t^3+t^2-0{,}1}\,dt.$$

3) On désigne par a, b, c et d les racines supposées réelles de l'équation en t : $t^4 - 5t^2 + xt + 4 = 0$ (x paramètree réel) et on pose :

$$E = \int_0^a \frac{dt}{t^2+xt+1} + \int_0^b \frac{dt}{t^2+xt+1} + \int_0^c \frac{dt}{t^2+xt+1} + \int_0^d \frac{dt}{t^2+xt+1}.$$

Déterminer x pour que E puisse s'écrire $\displaystyle\int_0^{-1} \frac{dt}{t^2+xt+1}$.

☞ Des solutions à l'exercice n° 1 proposé dans le Corol'aire n° 47 :

Tout plan mené par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre divise ce solide en deux parties équivalentes (même volume). *(Leçons de géométrie. Jacques Hadamard - Armand Colin 1901).*

Solution de **Louis Rivoalan**

Soit quatre points non coplanaires A, B, C et D et O l'isobarycentre de ces quatre points.
Soit I, J, K, L, P et Q les milieux respectifs de [AC], [BD], [AD], [BC], [CD] et [AB].
Un calcul barycentrique usuel montre que O est aussi le milieu de [IJ], [KL] et [QP].
Soit $\vec{u} = \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$; $\vec{v} = \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+ \overrightarrow{OD})$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Considérons le repère (O ; ($\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$)). Dans ce repère, les points A, B, C et D ont pour coordonnées :
A (1 ; 1 ;1) ; B (-1 ; -1 ; 1) ; C (1 ; -1 ;-1) et D (-1 ; 1 ; -1).

Considérons la transformation affine f qui au point M (x ; y ; z) associe M' (x' ; y' ; z') avec : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$.

L'application linéaire associée est définie par les mêmes relations , et on a : $f(\vec{u}) = \vec{u}$; $f(\vec{v}) = -\vec{v}$, $f(\vec{w}) = -\vec{w}$. On a fof = Id. De plus f(A) = C et f(B) = D, f(I) = I et f(J) = J et f(O) = O. Par suite l'image de [AB] est [CD] et celle d'un plan π (O ; $\vec{u}$; $\vec{t}$) avec $\vec{t} = a\vec{v}+b\vec{w}$ est π' (O ; $\vec{u}$; $-a\vec{v} - b\vec{w}$). Donc $\pi' = \pi$.
Soit M le point d'intersection de π et de [AB] et P = s(M). Alors P = s([AB] ∩ π) = s([AB]) ∩ s(π) = [CD] ∩ π..
Rappel : le volume d'un tétraèdre ABCD est $\frac{1}{6}\det\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right|$.
Pour montrer l'invariance énoncée par J. Hadamard, il suffit de montrer que le volume de AMIJ est égal à celui de CPIJ.
En effet, les volumes formés par le tétraèdre et le plan π sont respectivement égaux à
ABCJ + IJCP – AMIJ d'une part et ACDJ + AMIJ – IJCP d'autre part, et il est facile de voir que les volumes de ABCJ et de ACDJ sont égaux à la moitié du volume de ABCD.
Det ($\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{IP}$) = det(s($\overrightarrow{IJ}$) ; s($\overrightarrow{IA}$) ; s($\overrightarrow{IM}$)) = det (s) × det ($\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{IA}$; $\overrightarrow{IM}$). Or det (s) = –1.
Par suite V(IJCP) = $\frac{1}{6}\det\left|\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IP}\right| = \frac{1}{6}\det\left|\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IM}\right|$ = V(IJAM). Ce qui démontre la proposition.

Autre démonstration (ou plutôt variante)

Tout comme l'aire d'un triangle le volume d'un tétraèdre est une propriété affine. En effet deux tétraèdres ayant la même base et dont les quatrièmes sommets sont situés dans un même plan parallèle à cette base ont le même volume.
Toute transformation affine conserve donc l'égalité de volume de deux tétraèdres. ABCD étant quelconque, il existe une transformation affine qui le rend régulier. Il suffit donc de démontrer la propriété demandée dans ce cas particulier.
Considérons donc un tétraèdre régulier ABCD, et soient I et J les milieux respectifs de [AC] et de [BD]. Soit π, un plan quelconque passant par I et J et coupant [AB] en M et [CD] en P.
Considérons le demi - tour d'axe (IJ), noté s. On peut remarquer que s est involutive.
On a s(A) = C, s(B) = D, donc s([AB]) = s([CD]).
Or tout plan contenant l'axe d'un demi - tour est invariant par ce demi-tour. Donc s(π) = π. et s(M) est l'intersection de π et de [CD], c'est-à-dire P = s(M).
La transformation s conservant les volumes, Vol(AIJM) = Vol(CIJP). Or Vol(ABCJ) = Vol(ACDJ) = 1/2 Vol(ABCD).
Donc Vol(ABCJ) + Vol(IJCP) – Vol(AMIJ) = Vol(ACDJ) + Vol(AMIJ) – Vol(IJCP)
Ce qui démontre l'invariance énoncée par J. Hadamard.

Solution de ***Frédéric De Ligt***

Cas particulier : Tout plan mené par une arête d'un tétraèdre et par le milieu de l'arête opposée, divise le tétraèdre en 2 parties équivalentes.

Preuve (voir figure 1) : Le plan de coupe partage le tétraèdre en 2 tétraèdres de même base DCI et de même hauteur car d(B ; DCI) = d(A ; DCI).

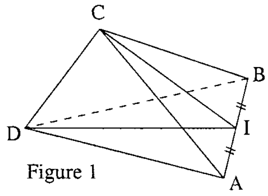

Figure 1

Cas général :

Preuve (voir figure 2) : Par les arêtes opposées d'un tétraèdre, menons des plans parallèles. On forme ainsi un parallélépipède ABCDEFGH de volume V circonscrit au tétraèdre ACHF. Le plan de coupe intercepte les arêtes du parallélépipède en O, P, Q, R ; il partage clairement celui-ci en deux parties de même volume. Chacun des 4 tétraèdres ABCF, CGHF, ACHD, AFHE a le même volume à savoir V/6.
Exemple : vol(ABCF) = aire(ABC) x d(F ; ABC) /3
= aire(ABCD) x d(F ; ABCD)/6
Le plan de coupe partage le tétraèdre CGHF en deux parties :
notons V1 le volume du tétraèdre CJOX et V1' le volume restant.
V1 = aire(CJO) x d(X ; CJO)/3.

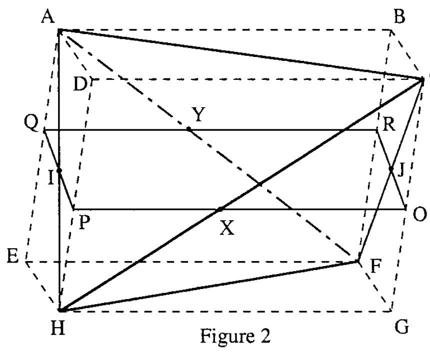

Figure 2

De même le tétraèdre ABCF est partagé en deux parties : notons V2 le volume du tétraèdre RJFY et V2' le volume restant. V2 = aire(RJF) x d(Y ; RJF)/3.

Dans CHG et dans FBA, d'après la propriété de Thalès : CO/CG = OX/HG et FR/FB = RY/AB . Comme CO = FR, CG = BF, HG = AB alors OX = RY. Ajoutons à cela que (OX) est parallèle à (RY) et l'on a : d(X ; CJO) = d(Y ; RJF) .
Il est clair que : aire(RJF) = aire(CJO) et l'on est maintenant certain que V1 = V2
On en déduit que V1' = V/6 - V1 = V/6 - V2 = V2'.

Par un raisonnement semblable, si l'on écrit : vol(AFHE) = V3 + V3' où V3 est le volume du tétraèdre AQIY et vol(ACHD) = V4 + V4' où V4 est le volume du tétraèdre IPXH , on démontre que V3 = V4 et V3' = V4' .
Finalement vol(JXIY, A, C) = V/2 - V1 - V2' - V3 - V4' = V/2 - V1' - V2 - V3' - V4 = vol(JXIY, H, F) .

Solution de ***Serge Parpay***

Dans ce qui suit l'aire d'une surface S sera notée $\mathcal{A}$(S), le volume d'un solide V sera noté $\mathcal{V}$(V). Les parenthèses ou crochets en usage maintenant ne seront pas utilisés sauf risque de confusion. Les projections utilisées sont des projections orthogonales : on ne le précisera donc pas à chaque fois.

Données (figure 1) : tétraèdre IJXY
Q : plan du triangle IJX ; XK : hauteur du triangle IJX ; YH : hauteur du tétraèdre (base IJX)
P : plan perpendiculaire à IJ en un point o ; s : point de IJ tel que so = IJ
x, y, h : projections orthogonales de X, Y, H sur P.

Dénomination : oxy sera appelé profil du tétraèdre dans la direction IJ.
Les deux tétraèdres IJXY et soxy ont même volume :
$\mathcal{V}$(IJXY) = 1/3 $\mathcal{A}$(IJX).YH = 1/3 (1/2. IJ. XK) .YH ,
$\mathcal{V}$(soxy) = 1/3 $\mathcal{A}$(oxy).so = 1/3 (1/2.ox .yh). so.
Mais IJ = so, XK = ox, YH = yh : l'égalité des volumes est démontrée.
Propriété : **Soit un tétraèdre IJXY, ℓ la longueur de l'arête IJ, oxy le profil de IJXY dans la direction IJ. Le volume du tétraèdre est $\mathcal{V}$(IJXY) = 1/3.ℓ.$\mathcal{A}$(oxy).**
Remarque : en conséquence, tous les tétraèdres I'J'X'Y' de profil oxy et d'arête I'J', I' et J' étant sur la droite IJ et I'J' = IJ, ont même volume.

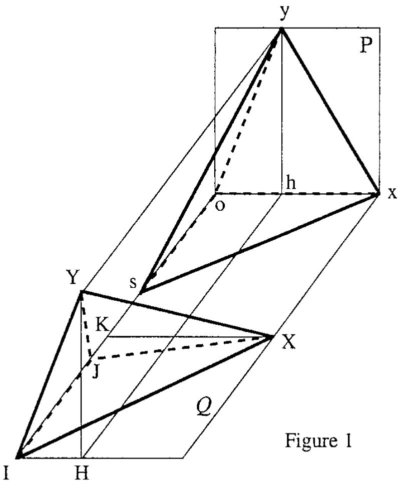

Figure 1

L'exercice proposé :

Données (figure 2) : tétraèdré ABCD. I et J : milieux de AB et CD.
P : plan perpendiculaire à IJ en un point o ; a,b,c,d : projections orthogonales de A,B,C,D sur P.
Le quadrilatère abcd est le profil du tétraèdre ABCD dans la direction IJ. I et J étant les milieux de AB et CD, o (leur projection commune) sera le milieu de ab et cd : le quadrilatère abcd est un parallélogramme de centre o.
Soit un plan Π passant par IJ. Π est perpendiculaire à P et toute droite de Π se projette en la droite Δ, intersection de P et de Π, cette droite passant évidemment par o.
Le plan Π coupera le tétraèdre en deux parties.
Quatre cas sont à envisager :
1) Δ coupe ad en l et bc en k : le plan Π coupe alors AD en L (se projetant en l) et BC en K(se projetant en k).
2) Cas limite du cas précédent : l en a, k en b, donc L en A et K en B.
3) Δ coupe bd en l' et ac en k' : le plan Π coupe alors BD en L' (se projetant en l') et AC en K' (se projetant en k').
4) Cas limite du cas précédent : l'en d, k'en c, donc L' en D et K' en C.

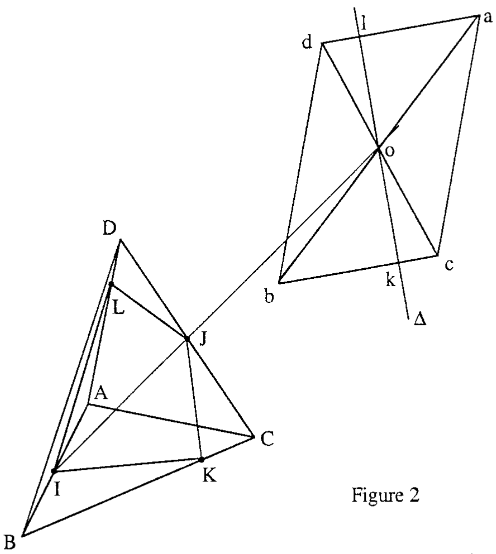

Figure 2

Dans ces différents cas, les sections du tétraèdre par le plan Π sont le quadrilatère IKJL, le triangle BJA, le quadrilatère IK'JL', le triangle ICD.
Le raisonnement suivant porte sur le cas 1). Les autres cas se traiteraient par un raisonnement semblable (certains volumes seraient nuls).
On découpe le tétraèdre en six tétraèdres d'arête commune IJ : IJLD, IJDB, IJBK, IJKC, IJCA et IJAL. Leurs profils sont respectivement old, odb, obk, okc, oca et oal.
On a par symétrie de centre o et calcul des volumes selon la propriété énoncée plus haut :
$\mathcal{A}$(old) = $\mathcal{A}$(okc) donc $\mathcal{V}$(IJLD) = $\mathcal{V}$(IJKC)
$\mathcal{A}$(odb) = $\mathcal{A}$(oca) donc $\mathcal{V}$(IJDB) = $\mathcal{V}$(IJCA)
$\mathcal{A}$(obk) = $\mathcal{A}$(oal) donc $\mathcal{V}$(IJBK) = $\mathcal{V}$(IJAL)
En "regroupant " les tétraèdres IJLD, IJDB et IJBK d'une part, les tétraèdres IJKC, IJCA, IJAL d'autre part et compte tenu des égalités précédentes, on prouve que les deux polyèdres IKJLBD et IJKLAC ont même volume, volume égal en conséquence à la moitié du volume du tétraèdre ABCD. Il en est de même des cas limites : les tétraèdres ABJC et ABJD, CDIA et CDIB.
Tout plan passant par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre coupe ce tétraèdre en deux parties équivalentes.
Remarque : tous les tétraèdres de profil abcd relativement à IJ (I milieu de AB, J milieu de CD, IJ de longueur donnée ℓ) ont la même propriété, les volumes restant les mêmes.