

RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - 5 avril 2001

Éléments de solutions

1 La tour des 4 sergents de La Rochelle (5 points)

On dénombre 21 pierres de 4 unités, soit 84 unités. Les pierres blanches occuperaient donc $12 \times 12 - 84 = 60$ unités avec une masse de 50 kg. Les pierres noires pèsent donc : $(50 : 60) \times 84 = 70$ kg.

2 2001, l'odyssée de l'espace (5 points)

En ôtant les huit sphères "sommets" et la sphère centrale, il reste $2001 - 9 = 1992$ sphères à répartir sur les douze arêtes, soit $1992 : 12 = 166$ sphères par arête. En ajoutant les deux sphères qui sont aux extrémités des arêtes, il y a donc **168 sphères par arête**.

Autre solution : En ôtant la sphère centrale, il reste 2000 sphères à répartir sur les arêtes. Si n est le nombre de sphères par arête, on a : $12n - 16 = 2000$. Il faut en effet ôter 16 sphères, car dans $12n$, les sphères des sommets appartiennent à trois arêtes et sont donc comptées trois fois. On obtient alors directement $n = 168$.

3 La Sainte Irène (5 points)

Si'il est évident que 2001 est divisible par 3, il est certain, d'après le texte, que 2001 a d'autres diviseurs. On trouve : $2001 = 3 \times 23 \times 29$, ou encore $3 \times 23 \times 29 \times 1 \times 1$, puisqu'il y a cinq personnes. Les parents ont donc 23 et 29 ans, l'aîné a 3 ans et les jumeaux ont 1 an.

4 Les comptes des deux mille et une nuits (10 points)

Si n est le nombre de têtes du troupeau quand Ali a été embauché, on a l'équation suivante : $n - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \dots + 1998 - 1999 + 2000 - 2001 = 0$.

En regroupant les termes ainsi :

$$n - 1 + (2 - 3) + (4 - 5) + (6 - 7) + \dots + (1998 - 1999) + (2000 - 2001) = 0$$

$$n - 1 + (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) + (-1) = 0, \text{ c'est-à-dire } n - 1 + 1000 \times (-1) = 0.$$

$n - 1001 = 0$. D'où $n = 1001$. C'est bien un conte des Mille et une nuits !

5 Le troc de Lily (5 points)

Nous avons trouvé 7 échanges :

$D + D$	(1) $\rightarrow D + 2B$	$D + B + A + G$ (5) $\rightarrow D + B + A + B + A$ $2B + A + D + A$ (3) $\rightarrow 2B + A + 3F$ $2B + A + F + 2F$ (4) $\rightarrow 2B + A + F + B + C$ <i>Le deuxième échange (5) peut être fait après l'échange (3) ou après l'échange (4).</i>
$D + B + B$	(2) $\rightarrow D + B + C + E$	
$D + B + C + E$	(6) $\rightarrow D + 2G$	
$D + G + G$	(5) $\rightarrow D + G + B + A$	

9 Le caprice de Marc (5 points)

Nous avons symbolisé les six places par six cases. A et B désignent les parents, X les cases des bouts de rangées que Marc ne veut pas prendre. Voici les six positions possibles pour les parents, et six autres en intervertissant A et B si on différencie les positions du père et de la mère.

M et Mme Dubois ont 12 façons de se placer.

A			B		X
X	A		B		X
X	A			B	X
X		A	B		X
X		A		B	X
X		A			B

10 Curieuse Léa (5 points)

$$7820^2 - 57\,100\,231 = 4\,052\,169 = 2013^2.$$

$$\text{Donc } 57\,100\,231 = 7820^2 - 2013^2 = (7820 + 2013)(7820 - 2013) = 9833 \times 5807.$$

En utilisant l'algorithme d'Euclide, on démontre que 9833 et 5807 sont premiers entre eux.

11 Der Sammler ; El coleccionista ; The coin collector (5 points)

Un collectionneur de pièces jaunes a un certain nombre de pièces de 20 centimes. Au lieu de les ranger en pile, il les étale sur une feuille. Il en place une au centre de la feuille puis 6 autres en couronne autour de la pièce centrale. Il fait une deuxième puis une troisième couronne. Il lui reste 3 pièces.

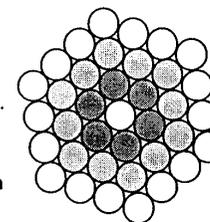
Combien en avait-il ? Combien lui en faudrait-il en plus pour faire une quatrième couronne ?

Voici les trois couronnes réalisées autour de la pièce centrale.

Les nombres de pièces sont successivement

$$1 + 6 + 12 + 18 = 37. \text{ Le collectionneur avait donc 40 pièces.}$$

Le nombre de pièce de la couronne suivante est 24. **Il lui en manque donc 21** pour réaliser cette quatrième couronne.



12 Fayçal Essiv en famille (10 points)

Soit S la somme d'argent de Fayçal.

$$\text{On a : } 3S/7 + nS/5 + 60 = S, \text{ c'est-à-dire : } 15S + 7nS + 2100 = 35S.$$

$$20S - 7nS = 2100; (20 - 7n)S = 2100; S = 2100/(20 - 7n).$$

$20 - 7n$ est strictement positif. Donc $n = 1$ ou $n = 2$.

Si $n = 1$, $20 - 7n = 20 - 7 = 13$, et 13 ne divise pas 35×60 .

Si $n = 2$, $20 - 7n = 20 - 14 = 6$, et 6 divise 35×60 .

$$\text{Alors, } S = 2100/6 = 350.$$

Fayçal donne 350 F à ses trois enfants.

6 La planète des Jeux (10 points)

Soit $a(ABCD)$ l'aire de $ABCD$.

Dans le triangle ABH ,
 $EI = 1/2 AH = 1/2 FC$.

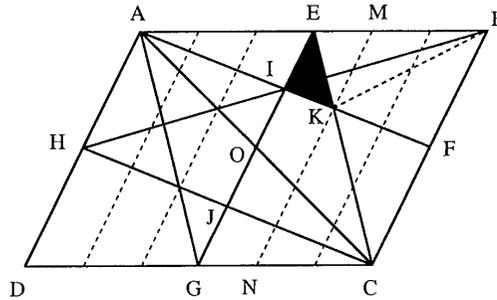
De même, $KI = 1/2 KF$
 et $KE = 1/2 KC$. Donc

$$\begin{aligned} a(EIK) &= 1/4 a(KFC) \\ &= 1/4 \times 1/2 a(KFB) \\ &= 1/8 \times 1/2 a(CBMN) \\ &= 1/16 \times 1/3 a(ABCD) \end{aligned}$$

Donc $a(EIK) = 1/48 a(ABCD)$

Si $a(ABCD)$ représente 12 000 habitants, $a(EIK)$ représente $12\,000/48 = 250$.

Il y a donc **250 amateurs de jeux mathématiques**.



7 La pastèque (5 points)

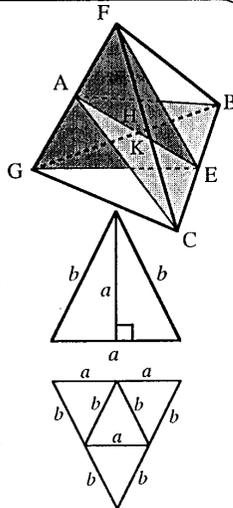
Si l'eau représente 99 % d'une pastèque de 1 kg, la matière sèche représente 1%, donc 10 g. Après exposition au soleil, l'eau ne représente plus que 98 %. Donc les 10 g de matière sèche représentent 2% de la pastèque asséchée. Et cette pastèque asséchée pèse alors 500 g.

8 Un tétraèdre (15 points)

On a tracé en traits épais le tétraèdre $BCGF$. Il n'est pas régulier car les faces ne sont pas des triangles équilatéraux. En effet, par exemple, dans le triangle BFC , la hauteur $[FE]$ relative à $[BC]$ est égale à BC . Donc $BF > BC$.

Soit a la mesure des côtés des triangles équilatéraux ABC et EFG . $FB = FC = CG = GB = b$. Toutes les faces triangulaires du tétraèdre $BCFG$ sont isométriques. Ce sont des triangles isocèles de côtés $(a; b; b)$ comme le triangle ci-contre. À partir de ce triangle, nous avons dessiné en dessous un patron à l'échelle 1/2.

Pour que $BCFG$ soit un tétraèdre régulier, et si $BC = a$, il faut que $EF = a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il faut donc que les triangles ABC et EFG soient isocèles respectivement en A et E et que leurs côtés soient $(a; a \frac{\sqrt{3}}{2}; a \frac{\sqrt{3}}{2})$.

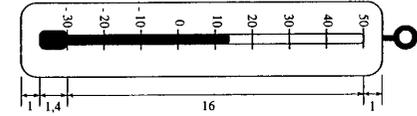


13 Chaud et froid (10 points)

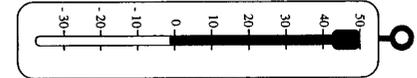
La température est la même quand le mercure est à la moitié du tube entier (colonne et réservoir), soit à $(16 + 1,4)/2$ cm, donc à 8,7 cm des extrémités du tube.

Or 16 cm correspond à 80° . Donc 1 cm correspond à 5° .

La température cherchée est donc à une "distance" de $5 \times 8,7 = 43,5^\circ$ du haut du tube, soit $50^\circ - 43,5^\circ = 6,5^\circ$.



Dessin 1 : thermomètre avant transformation



Dessin 2 : thermomètre après transformation

Compléments pour la classe de Seconde

14 Ludomaniaques à tout âge... (10 points)

Soit L , C et E les nombres respectifs de lycéens, collégiens et écoliers.

On a $100L + 20C + 5E = 2000$ donc $20L + 4C + E = 400$ (1) et $L + C + E = 100$ (2).

En soustrayant membre à membre les équations (1) et (2), on obtient $19L + 3C = 300$, soit $19L = 3 \times (100 - C)$. 19 n'étant pas un multiple de 3, L en est obligatoirement un, et on a $C = 100 - 19L/3$. De cette relation et de l'équation (2) on peut construire le tableau suivant en prenant pour L les multiples successifs de 3 strictement inférieurs à 18.

L	0	3	6	9	12	15
C	100	81	62	43	24	5
E	0	16	32	48	64	80

La première colonne ne convenant pas, il y a donc les cinq autres répartitions données par le tableau.

15 Nicolas le jardinier (15 points)

L'aire de $IJKL$ est la moitié de l'aire de $ABCD$. Donc $AB \times BC / 2 = l \times L / 2 = 50$, et donc $l \times L = 100$

Par ailleurs, ABC est un triangle rectangle. D'après la propriété de Pythagore, on a $l^2 + L^2 = 20^2$. On obtient donc les deux équations $l \times L = 100$ et $l^2 + L^2 = 400$.

D'où $L^2 + 2 \times L \times l + l^2 = (L + l)^2 = 600$

et $L^2 - 2 \times L \times l + l^2 = (L - l)^2 = 200$

On en déduit que $L + l = 10\sqrt{6}$ et que $L - l = 10\sqrt{2}$

D'où $2l = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, c'est-à-dire $l = 5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

