RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur, ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, **en plus de la copie papier**, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci !

S. P.

☞ Des réponses

(1) *Nous avons publié dans le dernier numéro de Corol'aire une solution d'Hassan Tarfaoui au problème suivant :*

Démontrer que, pour tout ensemble $\{x, y, z\}$ de trois nombres réels quelconques, on a :
$$|x + y| + |y + z| + |z + x| \leq |x| + |y| + |z| + |x + y + z| .$$

Voici une autre solution de Louis Rivoallan :

Soit la fonction Ψ définie pour x, y et z réels par : $\Psi(x, y, z) = -|x+y| - |y+z| + |x| + |y| + |z| + |x+y+z|$.
On peut remarquer que pour tout x,y,z réels, $\Psi(x, y, z) = \Psi(-x, -y, -z)$.
Comme sur trois nombres, deux sont nécessairement du même signe, on peut donc supposer désormais que deux des nombres sont négatifs.
Fixons y et z avec $y \leq z \leq 0$ et étudions la fonction Φ, définie sur $]-\infty\ ; +\infty[$ par : $\Phi(x) = \Psi(x, y, z)$.
Cette fonction est continue sur $\Re$ et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\ ; 0[$, $]0\ ; -z[$; $]-z\ ; -y[$; $]-y\ ; -y-z[$ et $]-y-z\ ; +\infty[$. Plus précisément,
sur $]-\infty\ ; 0[$, $\Phi'(x) = -(-1) - (-1) + (-1) + (-1) = 0$; sur $]0\ ; -z[$, $\Phi'(x) = -(-1) - (-1) + 1 + (-1) = 2$;
sur $]-z\ ; -y[$, $\Phi'(x) = -1 - (-1) + 1 + (-1) = 0$; sur $]-y\ ; -y-z[$, $\Phi'(x) = -1 - 1 + 1 + (-1) = -2$;
sur $]-y-z\ ; +\infty[$, $\Phi'(x) = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$.
Φ est donc constante sur $]-\infty\ ; 0]$ et cette constante est 0, comme le montre un calcul élémentaire .
Φ est constante sur $[-y-z\ ; +\infty[$ et cette constante vaut $\Phi(-y-z) = 0$. On peut aussi remarquer qu'au voisinage de $+\infty$, les expressions contenant x seront positives, ce qui permet d'ôter les valeurs absolues.

D'où le tableau de variation de Φ :

x	$-\infty$		0		$-z$		$-y$		$-y-z$		$+\infty$
$\Phi'(x)$		0	//	2	//	0	//	-2	//	0	//
$\Phi(x)$		0 →	0	↗	$\Phi(-z)$	→	$\Phi(-y)$	↘	0	→	

On constate donc que, pour tout x réel, $\Phi(x) \geq 0$. Par suite, pour tout x, y et z réels, $\Psi(x,y,z) \geq 0$, ce qui démontre l'inégalité.

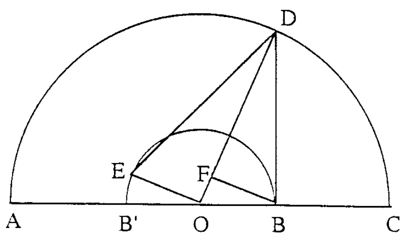
(2) *À la suite du texte "**Construction géométrique et moyennes**" paru dans cette rubrique du dernier Corol'aire et tiré du Que Sais-je n° 3383 (Les Moyennes), Jean-Marie Parnaudeau du Lycée de Venours nous transmet ce complément tiré de l'expérimentation d'évaluation en Première S de mai 1999.*

Sujet n°10 - Exercice n°3

Soit x et y deux réels strictement positifs, on appelle moyenne arithmétique, moyenne géométrique, moyenne harmonique et moyenne quadratique les nombres a, g, h et q respectivement définis par :

$$a = \frac{x+y}{2} \quad , \quad g = \sqrt{xy} \quad , \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \quad \text{et} \quad q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

1. Calculer a, g, h et q pour $x = 30$ et $y = 40$.
2. Pour x et y strictement positifs donnés, comparer g et h.
3. Pour la suite de l'exercice, **on admet que**, quels que soient les réels strictement positifs x et y, on a : $h \leq g \leq a \leq q$.
Montrer que a, g, h et q sont compris entre x et y.
4. On donne trois points A, B et C tels que B $\in$ [AC].
On pose AB = x et BC = y, et on trace les demi-cercles de centre O, milieu de [AC] et de rayons OA et OB, conformément à la figure ci-contre.
a) Démontrer que OD = a.
b) Démontrer que BD = g.
c) Démontrer que DF = h.
d) Démontrer que DE = q.



Commentaires fournis avec le sujet :

On mettra en valeur la capacité à prouver une inégalité générale dans les questions 2. et 3.
Pour la question 4. le décodage de la figure, qui a naturellement sa part d'implicite, et qui sert de support aux preuves et calculs proposés, devra être soigné.

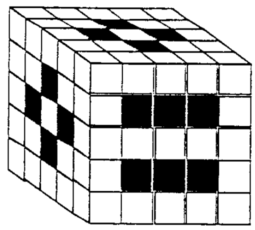
Des exercices

Exercice communiqué par notre collègue James Touillet de Parthenay :

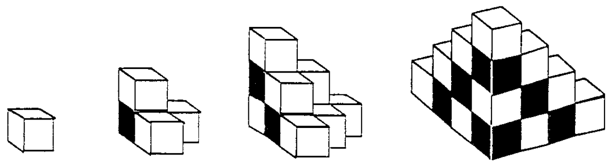
Combien y a-t-il de trapèzes de périmètre 11, tels que les longueurs des côtés soient des nombres entiers ?

Problèmes de dénombrement : les deux problèmes ci-dessous ont été proposés aux participants d'un rallye lors du Salon des Jeux Mathématiques 2001 organisé à Paris par le C.I.J.M. (1 - 4 juin). Voir l'article ci-dessous.

1) Le cube était présenté sur une table :
Ce cube est constitué de 125 petits cubes blancs ou noirs.
Chaque carré noir vu sur la face avant (resp. latérale) (resp. supérieure) est la base d'un parallélépipède formé par 5 petits cubes noirs (le grand cube est donc traversé par des barres de 5 petits cubes noirs).
Combien y-a-t-il de cubes blancs ? Si l'on enlève une couche de cubes sur chaque face du grand cube, combien reste-t-il de petits cubes blancs ?



2) Les cubes étaient présentés sur une table.
Dans les assemblages pyramidaux ci-contre deux cubes noirs n'ont aucune face commune, deux cubes blancs n'ont aucune face commune (les cubes noirs et blancs sont alternés). Le cube au sommet de la pyramide est blanc. Il n'y a pas de creux à l'intérieur de l'ensemble.
Combien y a-t-il de cubes blancs ? de cubes noirs ? dans une "pyramide" de hauteur 8 cubes ? de hauteur 13 cubes ? et plus généralement de hauteur n cubes ?



Hauteur 1 Hauteur 2 Hauteur 3 Hauteur 4

Salon des Jeux Mathématiques et Coupe Euromath 2001.

Après EuroMath 2000, nous voilà repartis dans nos pérégrinations parisiennes pendant le week-end de la Pentecôte. Notre équipe, cette année est au grand complet, c'est-à-dire composée d'un élève de primaire (CM2), d'un collégien de 4ème ou 3ème, d'un lycéen, d'un étudiant, d'un adulte et d'un capitaine qui ne joue pas.

Dès le vendredi soir, la soirée "Oulipo" nous met dans l'ambiance. Samedi après-midi, début des épreuves ; la participation est en forte baisse par rapport à l'an dernier puisqu'il n'y a que 8 équipes : Belgique, Italie, Midi - Pyrénées, Ile - de - France, Limousin, Rône - Alpes, Pays de Loire et Poitou - Charentes. C'est d'abord l'épreuve individuelle où chaque candidat a une dizaine d'exercices à résoudre pendant une heure. En voici deux exemples :

* Combien peut-on prendre au maximum d'entiers consécutifs sans qu'aucun d'entre eux soit tel que la somme de ses chiffres soit un multiple de 11 ?
* Quel est le côté du plus grand triangle équilatéral inscrit dans un carré de côté 1 ?

Ensuite, c'est l'épreuve collective où toute l'équipe essaye de remplir le maximum de grilles du genre Démineur, Bataille navale, etc.

Après ces épreuves, deux équipes sont sélectionnées d'office. Les autres équipes dont nous faisons partie recommencent d'autres épreuves individuelles puis d'autres épreuves collectives. Il faut sélectionner quatre autres équipes et nous arrivons cinquième ! Ce n'est pas grave, nous ferons mieux la prochaine fois (s'il y en a une). Nous nous réconfortons en dégustant la collation offerte par la librairie Eyrolles.

Dimanche matin, certains d'entre nous participent à la finale du Logic Flip pendant que d'autres visitent le salon EuroMath sur la place Saint Sulpice. Comme l'an dernier, ce salon a beaucoup de succès avec les nombreuses animations qui s'y déroulent. Il y a bien sûr des stands où l'on peut acquérir des ouvrages mathématiques, ludiques ou pratiques. Mais il y en a d'autres où l'on fait des pliages, des constructions de solides avec des cornières en carton, des jeux... Deux stands sont particulièrement fréquentés : celui de Math et Magie où la dextérité des jeunes animateurs n'a d'égal que leurs connaissances mathématiques, et celui de l'APMEP où l'on peut découvrir des jeux numériques, géométriques ou logiques, ou faire des coloriages géométriques ou logiques.

L'après-midi, les six équipes finalistes s'affrontent sur la scène de la mairie du VIème, pour résoudre casse-tête, puzzles, labyrinthe. Il ne reste alors que deux équipes qui se livrent en duel le soir, dans le même genre d'épreuve. Et c'est Rhône - Alpes qui gagne la coupe EuroMath 2001.

Rendez-vous en 2002 pour, je l'espère, une nouvelle coupe EuroMath.

Yvonne Noël.