RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur, ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, **en plus de la copie papier**, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci !

S. P.

☞ Des solutions

Exercice : Pour tout entier naturel non nul on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.
Quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 2, u_n n'est pas un nombre entier.

Cet énoncé a été proposé dans le Corol'aire n°41 avec deux solutions (dont une de Pierre Chevrier, Lycée Jean Macé de Niort). Alain Pichereau (Lycée Marguerite de Valois Angoulème) en a donné une troisième dans le précédent numéro. En voici une quatrième proposée par ***Jean-Christophe Laugier, Lycée Merleau-Ponty de Rochefort.***

Tout entier $k \in \{1, ..., n\}$ s'écrit sous la forme $2^{a_k} i_k$ (a_k et i_k entiers avec i_k impair). Posons $a = \max a_k$; il est clair que $a \geq 1$ puisque $n \geq 2$. Montrons que a n'est atteint que pour une seule valeur de k.

En effet, s'il existait k et k' tels que $1 \leq k < k' \leq n$ et $a_k = a_{k'} = a$, alors de $k = 2^a i_k$ et $k' = 2^a i_{k'}$, on tirerait $\frac{k - k'}{2} = 2^a \frac{i_k + i_{k'}}{2}$ et puisque $k < \frac{k + k'}{2} < k'$, d'après la définition de a, il en résulterait que $\frac{i_k + i_{k'}}{2}$ est impair. Le raisonnement précédent peut être à nouveau appliqué à k et $\frac{k + k'}{2}$ à la place de k' et a pour conséquence qu'il existe une infinité d'entiers entre k et k' ce qui est absurde. On peut donc écrire à présent :

$$1 + \frac{1}{2} + \ ... \ \frac{1}{n} = \frac{1}{2^{a_1} i_1} + \frac{1}{2^{a_2} i_2} + \ ... \ + \frac{1}{2^{a_n} i_n} = \frac{p_1 + p_2 + ... p_n}{2^a i_1 i_2 ... i_n} \text{ en posant } p_k = 2^{a-a_k} \frac{i_1 i_2 ... i_n}{i_k}$$

Les entiers $p_1, p_2, ..., p_n$ sont tous pairs sauf un exactement. Par suite $p_1 + p_2 + ... + p_n$ est impair. $2^a i_1 i_2 ... i_n$ étant pair, il en résulte que $1 + 1/2 + ... + 1/n$ n'est pas entier.

Remarque : En adaptant la démonstration précédente, on peut démontrer le résultat plus général suivant :

$1/p + 1/(p+1) + ... + 1/n$ n'est pas entier ($n > p \geq 1$).

Exercice proposé par Jacques DROUGLAZET (Surgères) dans Corol'aire n° 39 :

1- Trouver trois entiers relatifs x, y, z tels que : $x \text{ Arc tan} \frac{2}{3} + y \text{ Arc tan} \frac{2}{11} + z \text{ Arc tan} \frac{2}{29} = \pi$

2- Montrer qu'il est impossible de trouver trois entiers relatifs x, y, z tels que :

$$x \text{ Arc tan} \frac{1}{3} + y \text{ Arc tan} \frac{1}{4} + z \text{ Arc tan} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}.$$

Notre collègue Alain Pichereau d'Angoulême, bien connu des lecteurs de Corol'aire, nous a envoyé une solution que vous trouverez pages 6 et 7. Nous n'avons pas le logiciel avec lequel il a écrit son texte. Nous ne pouvons donc pas modifier sa mise en page.

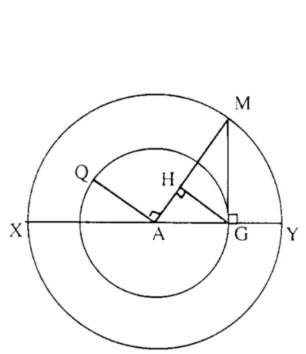
Exercice proposé dans Corol'aire n° 41
Démontrer que, pour tout ensemble{x, y, z) de trois nombres réels quelconques, on a :
$|x+y| + |y+z| + |z+x| \leq |x| + |y| + |z| + |x+y+z|$.

Notre collègue Assan Tarfaoui du collège Jean Moulin de Poitiers a résolu l'exercice ***en généralisant aux nombres complexes.*** *Vous trouverez sa solution pages 8 et 9, pour les mêmes raisons que la solution de l'exercice précédent.*

N.D.L.R. : Une solution avec x, y, z réels est évidemment plus simple : alors... au prochain numéro de Corol'aire ?
Une interprétation géométrique dans le plan complexe de l'exercice résolu par Assan Tarfaoui présente de l'intérêt. Nous invitons nos lecteurs à faire cette figure, en posant la question : est-il possible d'en trouver une solution géométrique ?

☞ Construction géométrique et moyennes.

Dans le n°3383 de la collection Que Sais-Je (Les moyennes) se trouve une construction géométrique intéressante, ne mettant en jeu pratiquement que le théorème de Pythagore.



Si l'on pose GX = x et GY = y, on a sur la figure :

MA = a, moyenne arithmétique de x et y, $a = \frac{(x + y)}{2}$

MG = g, moyenne géométrique de x et y, $g = \sqrt{xy}$

MH = h, moyenne harmonique de x et y, $\frac{2}{h} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

MQ = q, moyenne quadratique de x et y, $q = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$

Solution de l'exercice sur les arctangentes (apmep n°39)

Dans tout ce qui suit je noterai $A(x)$ =Arctan(x).

1) Trouver trois entiers relatifs x, y, z tels que $xA(\frac{2}{3}) + yA(\frac{2}{11}) + zA(\frac{2}{29}) = \pi$.

2) Montrer qu'il est impossible de trouver 3 entiers relatifs x, y, z tels que $xA(\frac{1}{3}) + yA(\frac{1}{4}) + zA(\frac{1}{5}) = \frac{\pi}{4}$.

Solution :

1) Un petit programme sur la TI 92 (trois boucles imbriquées) montre que $x = 6$, $y = -1$, $z = -3$ doivent convenir. Prouvons le.

Soit $X = \pi + A(\frac{2}{11}) + 3A(\frac{2}{29})$ et $Y = 6A(\frac{2}{3})$: la formule $\tan(3a) = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$ permet d'obtenir successivement : $\tan(3A(\frac{2}{3})) = -\frac{46}{9}$, $\tan Y = \frac{828}{2035}$, $\tan(3A(\frac{2}{29})) = \frac{5038}{24041}$. On peut alors écrire

$$\tan X = \frac{\frac{2}{11} + \frac{5038}{24041}}{1 - \frac{2}{11} \times \frac{5038}{24041}} = \frac{2 \times 24041 + 11 \times 5038}{11 \times 24041 - 2 \times 5038} = \frac{828 \times 125}{2035 \times 125}$$ et donc $X - Y = 2k\pi$ avec k dans Z

(24041 et 5038 n'ont aucun diviseur commun : $24041 = 29 \times 829$ et $5038 = 2 \times 11 \times 229$).

Reste à prouver que $k = 0$: pour cela encadrons $X - Y = \pi - 6A(\frac{2}{3}) + A(\frac{2}{11}) + 3A(\frac{2}{29})$.

De $A(\frac{2}{29}) < A(\frac{2}{11}) < A(\frac{2}{3})$ on obtient $X - Y < \pi + A(\frac{2}{11}) - 6A(\frac{2}{11}) + 3A(\frac{2}{11}) < \pi$

et $A(\frac{2}{3}) < A(1) = \frac{\pi}{4}$ donne $X - Y > \pi - 6\frac{\pi}{4} + A(\frac{2}{11}) + 3A(\frac{2}{29}) = -\frac{\pi}{2} + A(\frac{2}{11}) + 3A(\frac{2}{29}) > -\pi$.

Finalement $-\pi < X - Y < \pi$ et donc $k = 0$, soit $X = Y$: on a bien $6A(\frac{2}{3}) - A(\frac{2}{11}) - 3A(\frac{2}{29}) = \pi$.

2) Compte tenu des égalités $3 + i = \sqrt{10}\,e^{iA(\frac{1}{3})}$, $4 + i = \sqrt{10}\,e^{iA(\frac{1}{4})}$, $5 + i = \sqrt{10}\,e^{iA(\frac{1}{5})}$, la relation $xA(\frac{1}{3}) + yA(\frac{1}{4}) + zA(\frac{1}{5}) = \frac{\pi}{4}$ avec x, y, z entiers relatifs entraine que $(3 + i)^x(4 + i)^y(5 + i)^z = \sqrt{10}^x\sqrt{17}^y\sqrt{26}^z(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$.

On va montrer que cette égalité est impossible, cela grâce aux deux résultats suivants :

$(R1)$: Si a, b, c sont 3 entiers naturels avec a 1er et ne divisant ni b, ni c, alors $\sqrt{abc} \notin Q$ (vrai si b et/ou $c = 1$)

preuve :

si $\sqrt{abc} = \frac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux, alors $abcq^2 = p^2$: donc a divise p (a est 1er) et $p = ak$, $bcq^2 = ak^2$. Mais a étant 1er et ne divisant ni b, ni c il ne peut que diviser q, ce qui est en contradiction avec p et q premiers entre eux.

$(R2)$: si x, y, z sont dans Z alors $\sqrt{10}^x\sqrt{17}^y\sqrt{26}^z\sqrt{2} \notin Q$

preuve :

1er cas : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

supposons que $\sqrt{10}^x\sqrt{17}^y\sqrt{26}^z\sqrt{2} \in Q$:

soit x, y, z sont pairs et $\sqrt{2}$ serait rationnel : exclu d'après $(R1)$

soit un seul des trois est impair et $\sqrt{5}$ ou $\sqrt{17}\sqrt{2}$ ou $\sqrt{13}$ serait rationnel : exclu d'après $(R1)$

soit un seul des trois est pair et $\sqrt{17}\sqrt{13}$ ou $\sqrt{10}\sqrt{13}$ ou $\sqrt{5}\sqrt{17}$ serait rationnel : exclu d'après $(R1)$

soit x, y, z sont impairs et $\sqrt{5}\sqrt{17}\sqrt{26}$ serait rationnel : exclu d'après $(R1)$.

Donc si $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ alors $\sqrt{10}^x\sqrt{17}^y\sqrt{26}^z\sqrt{2} \notin Q$

2iéme cas : l'un, au moins des 3 nombres x, y, z est strictement négatif.

Ce cas se ramène au précédent car si $x < 0$ (par exemple) alors

$\sqrt{10}^{x}\sqrt{17}^{y}\sqrt{26}^{z}\sqrt{2} \notin Q \Leftrightarrow \sqrt{10}^{-x}\sqrt{17}^{y}\sqrt{26}^{z}\sqrt{2} \notin Q$ (puisque $\sqrt{10}^{x} = \frac{\sqrt{10}^{-x}}{\sqrt{10}^{-2x}}$ et $\sqrt{10}^{-2x}$ est entier).

Montrons maintenant que l'égalité $(3+i)^x(4+i)^y(5+i)^z = \sqrt{10}^{x}\sqrt{17}^{y}\sqrt{26}^{z}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ est impossible : il y a 4 cas à envisager.

1er cas : $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

La partie réelle de $(3+i)^x(4+i)^y(5+i)^z$ est un entier et donc $\sqrt{10}^{x}\sqrt{17}^{y}\sqrt{26}^{z}\frac{\sqrt{2}}{2}$ doit être un entier ce qui est impossible d'après $(R2)$.

2ième cas : deux, seulement, des 3 nombres x, y, z sont positifs ou nuls.

Si $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z < 0$ (par exemple) on utilise la relation $(3+i)^x(4+i)^y\sqrt{26}^{-z} = \sqrt{10}^{x}\sqrt{17}^{y}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(5+i)^{-z}$ et compte tenu que $(3+i)^x(4+i)^y$ et $(1+i)(5+i)^{-z}$ ont des parties réelles entières, $\frac{\sqrt{10}^{x}\sqrt{17}^{y}}{\sqrt{26}^{-z}}\sqrt{2}$ doit être un rationnel ce qui est encore impossible d'après $(R2)$.

3ième cas : un seul des trois nombres x, y, z est positif ou nul.

Puisque $(3+i)^{-x}(4+i)^{-y}(5+i)^{-z} = \sqrt{10}^{-x}\sqrt{17}^{-y}\sqrt{26}^{-z}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$ et que parmi les trois nombres $-x, -y, -z$ deux sont strictement positifs et l'autre négatif ou nul on arrive encore à une impossibilité, cela par un raisonnement analogue soit à celui du 1er cas, soit à celui du 2ième cas.

4ième cas : $x < 0,\ y < 0,\ z < 0$.

L'égalité utilisée au 3ième cas entraîne cette fois que $\sqrt{10}^{-x}\sqrt{17}^{-y}\sqrt{26}^{-z}\frac{\sqrt{2}}{2}$ doit être entier, ce qui est impossible d'après $(R2)$.

Finalement l'égalité $(3+i)^x(4+i)^y(5+i)^z = \sqrt{10}^{x}\sqrt{17}^{y}\sqrt{26}^{z}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ (avec x, y, z dans Z) est impossible et donc il n'existe pas 3 entiers relatifs x, y, z tels que $xA(\frac{1}{3}) + yA(\frac{1}{4}) + zA(\frac{1}{5}) = \frac{\pi}{4}$.

Remarque 1

Bien entendu , sans passer par les nombres complexes, il est évident que l'égalité $xA(\frac{1}{3}) + yA(\frac{1}{4}) + zA(\frac{1}{5}) = \frac{\pi}{4}$ (avec x, y, z dans Z) ne peut avoir lieu pour $x < 0,\ y < 0,\ z < 0$, un négatif ne pouvant être égal à un positif.

On peut aussi, sans passer par les nombres complexes, montrer que cette égalité est impossible pour $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$: en effet dans ce cas $(x+y+z)A(\frac{1}{5}) \leq \frac{\pi}{4} \leq (x+y+z)A(\frac{1}{3})$ ce qui conduit à $2{,}44 < x+y+z < 3{,}98$ et nécessairement $x+y+z = 3$. A l'aide d'une machine à calculer on peut alors vérifier qu'aucun des 10 triplets possibles (x, y, z) ne vérifie (C).

Mais lorsque x, y, z ne sont pas tous de mêmes signes je n'ai pas trouvé de solution autre que celle ci-dessus avec les nombres complexes.

Remarque 2

Revenons à la première question : $xA(\frac{2}{3}) + yA(\frac{2}{11}) + zA(\frac{2}{29}) = \pi$ et x, y, z dans Z implique que $(3+2i)^x(11+2i)^y(29+2i)^z = -\sqrt{13}^{x}\sqrt{125}^{y}\sqrt{845}^{z}$ (car $e^{i\pi} = -1$).

Mais cette fois un raisonnement analogue à la deuxième question ne permettra pas d'exclure le cas x pair et ≥ 0, y et z impairs et <0 : en effet ce raisonnement conduirait à dire que $\sqrt{125}^{-y}\sqrt{845}^{-z}$ doit être rationnel donc $\sqrt{125}\sqrt{845}$ doit être aussi rationnel ....ce qui est vrai, puisque $\sqrt{125}\sqrt{845} = \sqrt{5^3}\sqrt{5 \times 13^2} = 325$ (le résultat $(R1)$ ne peut être appliqué à $\sqrt{125}\sqrt{845}$).

En fait on a effectivement $(3+2i)^6(11+2i)^{-1}(29+2i)^{-3} = -\sqrt{13}^{6}\sqrt{125}^{-1}\sqrt{845}^{-3} = \frac{-1}{125}$.

<u>Une solution de l'exercice n°1 paru dans le Corol'aire n°41</u> :

Je dois démontrer l'inégalité suivante pour x, y, z trois complexes quelconques
$|x+y|+|x+z|+|y+z| \leq |x|+|y|+|z|+|x+y+z|$
Posons $S = |x|+|y|+|z|$ et $S' = |x+y+z|$, calculons $S^2 - S'^2$:
$S^2 - S'^2 = |x|^2+|y|^2+|z|^2+2|x||y|+2|x||z|+2|y||z| - \left(|x|^2+|x|^2+|x|^2+2Re(x.\overline{y})+2Re(x.\overline{z})+2Re(y.\overline{z})\right) =$
$2(|x||y| - Re(x\overline{y})) + 2(|x||z| - Re(x\overline{z})) + 2(|y||z| - Re(y\overline{z}))$

Posons $f(x,y) = |x|+|y|+|x+y|$ et $g(x,y) = |x|+|y|-|x+y|$, on a :
$f(x,y)g(x,y) = (|x|+|y|)^2 - |x+y|^2 = 2(|x||y| - Re(x\overline{y}))$
d'où $S^2 - S'^2 = f(x,y)g(x,y) + f(x,z)g(x,z) + f(z,y)g(z,y)$ (1)
$f(x,y) = |x|+|y|+|x+y| = |x|+|y|+|x+y+z-z| \leq |x|+|y|+|x+y+z|+|z|$ (2), d'où : $f(x,y) \leq S+S'$
l'égalité (1) s'écrit donc $S^2 - S'^2 \leq (S+S')(g(x,y)+g(x,z)+g(y,z))$.
or $S + S' \neq 0$, d'où $S - S' \leq g(x,y)+g(x,z)+g(y,z)$.
ce qui donne $|x|+|y|+|z| - |x+y+z| \leq |x|+|y|-|x+y|+|x|+|z|-|x+z|+|z|+|y|-|z+y|$.
Soit $|x+y|+|x+z|+|z+y| \leq |x|+|y|+|z|+|x+y+z|$

<u>Cas d'égalité</u> :
On n'a égalité dans l'inégalité proposée que si on a égalité dans l'inégalité (2), c'est-à-dire :
$|x|+|y|+|x+y| = |x|+|y|+|x+y+z-z| \leq |x|+|y|+|x+y+z|+|z|$
Soit $|x+y| = |x+y+z|+|z|$. De même, on a $|z+y| = |x+y+z|+|x|$ et $|x+z| = |x+y+z|+|y|$

D'où le système suivant $\begin{cases} |x+y| = |x+y+z|+|z| & (3) \\ |y+z| = |x+y+z|+|x| & (4) \\ |x+z| = |x+y+z|+|y| & (5) \end{cases}$

L'égalité (3) équivaut à $|x+y+z| = |x+y|-|z|$, d'où en élevant au carré :
$(x+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}) = (x+y)(\overline{x}+\overline{y}) + z\overline{z} - 2|x+y||z|$. Donc :$Re(x+y)\overline{z} = -|x+y||\overline{z}|$
Il en résulte : $(x+y)\overline{z}$ est un réel négatif.
On démontre de même que, $(x+z)\overline{y}$ et $(z+y)\overline{x}$ sont des réels négatifs.
Il existe donc, trois réels négatifs α, β, γ tels que $(x+y)\overline{z} = \alpha, (x+z)\overline{y} = \beta, (z+y)\overline{x} = \gamma$.

<u>Envisageons trois cas</u> :
<u>1°</u> cas : $xyz(x+y+z) \neq 0$.
En posant $x+y+z = u$, on a $u - z = \dfrac{\alpha}{\overline{z}} = \dfrac{\alpha}{|z|^2}z$

De même, on obtient $u - y = \dfrac{\alpha}{\overline{y}} = \dfrac{\beta}{|y|^2}y$ et $u - x = \dfrac{\alpha}{\overline{x}} = \dfrac{\gamma}{|x|^2}x$

Si M, M_1, M_2 et M_3 sont les images respectivement de u, x, y, z, les dernières relations s'écrivent donc :
$\overrightarrow{MM_3} = \dfrac{\alpha}{|z|^2}\overrightarrow{OM_3}$, $\overrightarrow{MM_2} = \dfrac{\beta}{|y|^2}\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{MM_1} = \dfrac{\gamma}{|x|^2}\overrightarrow{OM_1}$.
Donc les points M_1, M_2, M_3 appartiennent à la droite (MO).
<u>2°</u> cas : $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$.
Si l'un des complexes x, y, z est nul, par exemple $z = 0$, on a donc $|x| = |x+y|+|y|$ et $|y| = |x+y|+|x|$,
ce qui donne $x + y = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{0}$, donc M_3 est le milieu de $[M_1M_2]$.
<u>3°</u> cas : $x+y+z = 0$, ce qui revient à dire que le point O est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3. On a bien l'égalité, mais pas forcément l'alignement avec l'origine, comme le montrent les exemples suivants :
$x = 1, y = j, z = j^2$ ou $x = -3, y = 7, z = -4$ ou $x = 2+i, y = 1-i, z = -3$

Réciproquement, si M_1, M_2 et M_3 appartiennent à une même passant par O, nous devons considérer deux cas :
<u>1°</u> cas : si M_1, M_2 et M_3 appartiennent à une même demi-droite d'origine O, nous devons considérer deux cas :
1) Si $M_1 = M_2 = M_3 = O$ alors $x = y = z = 0$ et l'égalité est bien vérifiée.
2) Si l'un des points M_1, M_2 ou M_3 est distinct de O par exemple M_1, on peut trouver deux réels positifs α' et β' tels que $y = \alpha' x$ et $z = \beta' x$.
Il s'ensuit que
$|x+y|+|x+z|+|y+z| = 1+\alpha'+1+\beta'+\alpha'+\beta' = 2+2\alpha'+2\beta'$
$|x|+|y|+|z|+|x+y+z| = \alpha'+\beta'+1+1+\beta'+\alpha' = 2+2\alpha'+2\beta'$
On a bien l'égalité demandée .
<u>2°</u> cas : Si l'un des points M_1, M_2, M_3 est situé sur la demi-droite $(MO]$, par exemple M_3 et les autres sont sur l'autre demi-droite d'origine O.
Il existe donc un réel strictement positif a tel que $y = ax$. Or les points M et M_1 sont situés de part et

d'autre de O, donc on a $x+y+z=bx$ avec $b<0$. D'où $z=(b-1-a)x$. Donc :
$|x+y|+|x+z|+|z+y|=(1+a)|x|+(a-b)|x|+(1-b)|x|=(1+2a-2b)|x|$
$|x+y+z|+|z|+|x|+|y|=-b|x|+(1+a-b)|x|+a|x|=(1+2a-2b)|x|$. On a bien l'égalité, de plus on a :
$|z|=|a+1-b||x|>(1+a)|x|=|x|+|y|$. De plus, le point isolé a un module plus grand que la somme des modules des autres points.

3° cas : Si O est l'isobarycentre des points M_1, M_2, M_3, c'est-à-dire $x+y+z=0$.On a bien l'égalité demandée.
OUF!!!