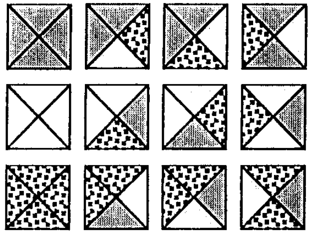
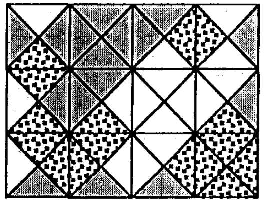
RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES - 27 avril 2000

Éléments de solutions

(1) Anti Bicolore. (10 points)

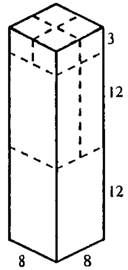
Voici les 12 pièces monocolores ou tricolores, dans un classement logique, et un pavage rectangulaire de 3 sur 4 qui respecte la règle de juxtaposition.

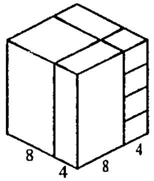


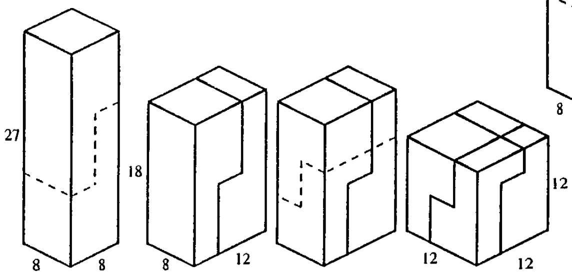


(2) Mise en boîte. (10 points)

Voici, ci-contre, un découpage en 7 morceaux.
Mais ce n'est pas le découpage minimum.
Vous avez, ci-dessous, un découpage en 4 morceaux.



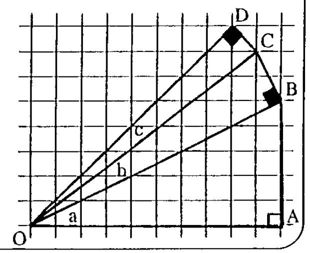




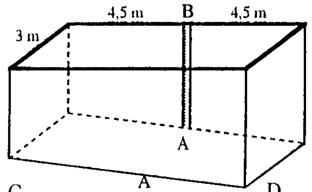
(3) Lettre de Léa Broutille à son cousin Ila Ransor. (15 points)

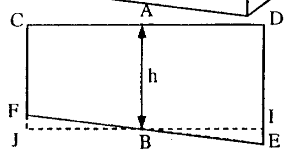
OAB est un triangle rectangle en A. À l'aide des coordonnées des points on peut calculer facilement : $OB = 5\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{5}$, $OC = \sqrt{130}$, $CD = \sqrt{2}$ et $OD = 8\sqrt{2}$, et démontrer par la propriété de Pythagore que les triangles OBC et OCD sont rectangles en B et D.

On peut alors utiliser les fonctions trigonométriques dans ces triangles : $\tan a° = 5/10 = 1/2$, $\tan b° = \sqrt{5}/5\sqrt{5} = 1/5$ et $\tan c° = \sqrt{2}/8\sqrt{2} = 1/8$, avec $a° + b° + c° = 45°$.



(8) Die Messlatte im Swimming-pool.
La regla en la piscina
The ruler in the swimming pool.
La règle dans la piscine.





La piscine est remplie en 3 jours moins 12 heures, donc en 60 heures.
Un débit de 1,5 L en 6 s correspond à 15 L en 1 min et donc à 900 L en 1 h. La piscine contient donc 900 x 60 = 54 000 L d'eau.
Son volume est de 54 m^3.

L'aire de la base trapézoïdale CDEF du prisme est la même que celle du rectangle CDIJ dont la longueur des côtés CJ et DI est égale à la demi somme des bases du trapèze, c'est-à-dire à la longueur de la règle AB.

L'aire de la face horizontale est de 3 m x 9 m = 27 m^2.

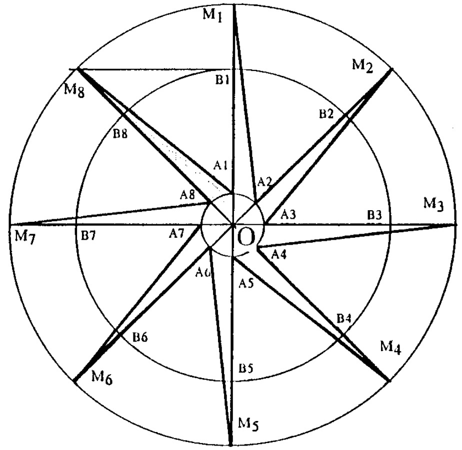
La hauteur de la règle est donc de $54m^3/27m^2 = 2$ m.

(9) Année 2000. (5 points)

On remarque que $2000 = 2 \times 1000 = 2 \times 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$.
Donc $2000 = 1 \times 2^4 \times 5^3 = 1 \times 4^2 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 \times 1 \times \sqrt{4}$.
On obtient encore : $2000 = (3^4 - 1) \times 5^2 = 2 \times (1 + 4 + 5)^3$.

(10) Étoile 2000. (15 points)

Le triangle OB_1M_8 est rectangle - isocèle en B_1.
Donc $\widehat{B_1OM_8} = \widehat{B_1M_8O} = 45°$,
et $\widehat{M_8B_1O} = 90°$.
De plus $M_8B_1 = B_1O = 50$ mm.
Aire du triangle OA_1M_8 :
Dans ce triangle, M_8B_1 est la hauteur associée à la base OA_1.
Donc $\mathcal{A}(OA_1M_8) = OA_1 \times M_8B_1/2$
$= 10 \times 50 / 2$
L'aire totale de l'étoile est donc :
$8 \times 10 \times 50 / 2 = 2000$ mm^2



(4) Les CD chez Georges. (5 points)

Soit a, b, c et d les nombres de CD apportés par André, Bernard, Claude et Daniel.
André, Bernard, Claude et Daniel ont apporté au total 15 CD ; donc $a + b + c + d = 15$ [1].
André et Claude en ont apporté 6 à eux deux ; donc $a + c = 6$ [2].
Claude et Daniel en ont apporté 7 à eux deux ; donc $c + d = 7$ [3].
De (1) et (3) on déduit que $a + b = 8$ [4]. Chacun a apporté au moins deux CD, donc $2 \leq a$ et, d'après [2], $a \leq 4$. Donc $2 \leq a \leq 4$. Mais personne n'en a apporté le même nombre ; donc $a \neq 3$ d'apès [2] et $a \neq 4$ d'après [4]. Il s'ensuit $a = 2$; d'où $b = 6$, $c = 4$ et $d = 3$.
C'est donc Claude qui a apporté 4 CD.

(5) Sur la planète Heptilon. (5 points)

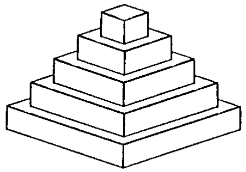
Le nombre ***1111*** correspond dans notre système décimal à :
$1 \times 7^3 + 1 \times 7^2 + 1 \times 7 + 1 = 1 \times 343 + 1 \times 49 + 1 \times 7 + 1 = 343 + 49 + 7 + 1 = 400$.
Le nombre ***2222*** = ***2*** x ***1111*** ; il correspond donc à 2 x 400 = 800.
Le nombre ***3333*** = ***3*** x ***1111*** ; il correspond donc à 3 x 400 = 1200.
Les années heptiloniennes ***1111***, ***2222*** et ***3333*** correspondent donc aux années terriennes 400, 800 et 1200.
2000 = 5 x 400. Donc le nombre 2000 correspond à ***5*** x ***1111*** = ***5555*** en heptilonien.
L'année terrienne 2000 est donc l'année heptilonienne ***5555***.
Remarque : on peut obtenir le résultat par divisions successives par 7 :
2000 = 7 x 285 + ***5*** ; 285 = 7 x 40 + ***5*** et 40 = 7 x ***5*** + ***5***, d'où la réponse.

(6) La montre du père Léon (10 points)

La montre du père Léon sera à nouveau à l'heure lorsqu'elle retardera exactement de 12 heures, soit 720 minutes. Sachant qu'elle retarde de 2 minutes par jour, elle redonnera l'heure exacte à la fin du 360$^{\text{ème}}$ jour de cette année. L'année 2000 est bissextile ; elle comporte donc 366 jours, et le 360$^{\text{ème}}$ jour est le jour de Noël.
La montre du père Léon donnera à nouveau l'heure exacte le jour de Noël à minuit, ou le 26 décembre à 0 heure.
Le père Léon et le père Noël n'ont donc pas distribué leurs cadeaux à la même heure.

(7) Pyramide 2000. (5 points)

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots\ldots + 17^2 + 18^2 = 2109$
Pour obtenir 2000, il faut donc ôter 109 cm^3, et la seule façon est d'enlever la plaque de côté 10 et celle de côté 3.
La hauteur de la pyramide est alors de 18 - 2 = 16 cm.



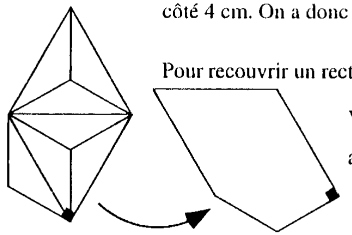
Compléments pour la classe de Seconde

(11) La famille Septime. (10 points)

Puisque les parents ont eu sept enfants en six ans, c'est qu'il y a eu des jumeaux. Puisqu'il y a deux gâteaux de plus qu'il y a deux ans, c'est qu'il y a deux ans le plus jeune enfant n'était pas né, l'avant dernier venait juste de naître, et les jumeaux étaient déjà nés. Actuellement, le plus jeune a donc 1 an, et les jumeaux ont x ans, avec $x \geq 3$. On a donc : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + x = 2(1 + 2 + 3 + 4 + x - 2)$. D'où $x + 21 = 16 + x$, et donc $x = 5$. Il faudra donc allumer $1 + 2 + 3 + 4 + 2 \times 5 + 6 = 26$ bougies.

(12) Pavage

Ce motif a une aire égale aux 7/3 de l'aire du triangle équilatéral de côté 4 cm. On a donc : $\frac{7}{3} \times 4 \times 4 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 28 \frac{\sqrt{3}}{3}$



Pour recouvrir un rectangle de $16 \times 28 \frac{\sqrt{3}}{3}$, il faut donc 16 pavés.

Voici, ci-dessous, un pavage du rectangle avec les découpages nécessaires de carreaux.