RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur, ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, **en plus de la copie papier**, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.

Serge Parpay.

☞ Exercices :

1) Démontrer que, pour tout ensemble $\{x,y,z\}$ de trois nombres réels quelconques, on a :
$|x+y| + |y+z| + |z+x| \leq |x| + |y| + |z| + |x+y+z|$. A quel moment a-t-on l'égalité ?

2) On donne deux rayons dans un cercle ; mener une corde qui soit divisée par eux en trois parties égales.

3) Par un point donné P, mener une droite qui forme avec deux autres droites données, un triangle de surface donnée.

NDLR : Les exercices 2 et 3 ci-dessus sont tirés du livre "Problèmes de constructions géométriques. Julius Petersen" (Editions Gabay). Ce livre est à conseiller à tous : aux "anciens" il apportera de précieux souvenirs et aux "nouveaux" des exercices pas forcément courants !

4) De notre collègue Gérard Bonnefond (Lycée de Civray) :

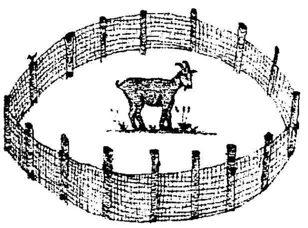
"Voici un texte de devoir à la maison (1ère S). Si cela peut intéresser Corol'aire ...

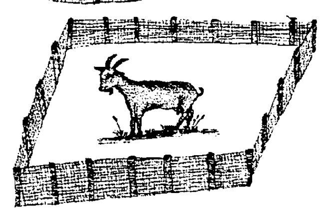
Bien cordialement."

NDLR : Si certains de nos lecteurs ont quelques difficultés à lire le texte : en principe il devrait y avoir autour d'eux des amis comprenant la plupart des mots. En cas de difficulté trop grande, nous écrire pour avoir une "traduction". G. Bonnefond nous a dit que quelques élèves de sa classe avaient rédigé carrément ce devoir en patois poitevin ou charentais et un élève en ch'timi !

Deus chebres en Deux-Sèvres

Cho boun' Armand l'avèt un pâturâ çh'étèt grand et 100 mètres de grillajhe peur y renfeurmer la Finaude et la Berlaude, sés deus chebres.
Mé o fot çh'i vous dise que lés chebres dou gas Armand ales étions pas tout à fèt queme chez lés jhènes d'avoure.
Sunjhez dun, o y avèt la Finaude, a velèt minjhez dan in caribot rund ou bè a dounerèt pas d'lait.
Quinte a la Berlaude ale étèt jhaïssablle lè tou, o li felèt un caribot caré peur qu'a doune dou lait.





I) Ah ! Cho pore Armand, si l'avèt core ayu çh'une chebre, mé pa deus.
Laqueu de sès deus chebres peurèt minjher le mé si Armand peurnèt les 100 m de grillajhe peur fére çho caribot.

II) Çhés deus chebres, bèn sur, alés étiont tétues, et peur le sur o felit qu'Armand fasisse çhés deus caribots avec çho grillajhe.
Mé Armand ol ét çheuqu'un çh'at pas l'èr d'un sot, le queneut tout pllin d'aféres et l'ét bèn rède fort.
Alôr, Armand copit çho grillajhe en deus, le prinyit x, le bout d'çho grillajhe çh'étèt peur fére le caribot d'la Finaude. (Fot dire qu'Armand, l'ét fort en algèbre, l'o diriont çhés-çhi çh'avont peuyu l'queneutre quinte l'usèt sés funds d'çhulotes su lés bancs de çhète école, lé, à Civray, le desont «Lycée» avoure).

1) Le sunjhit, et le s'demandit queu valour qu'o fedrèt douner à x, peur que çhés deus caribots sayont d'la minme grandou et peur qu'ol aye pas une chebre çh'en aye mé qu'l'âtre.

2) Peur en fini, l'at resunjhé, qu'sés deus chebres, peuvions bè étre gâtaïes, queme ol ét pas dous mindes, crayez pas qu'ales y veuront çheuque chouse (quoué que !), et le s'décidit peur yune valour de x qu'alèt fére qu'o li prindrèt pas tout pllin de pllaçe dan son pâturâ.
Mé, o felit teujou qu'Armand étudisse çhète fonction $A(x)$, ch'ét toute la grandou d'sés deus caribots, le rund et l'caré - cumptés ensemble -. Quinte Armand vinyit qu'à avére fini sés calculs, le queneussit qu'l'avèt fèt tout pllin d'ouvrajhe pasque le peuyit trouver ètou la répunse dou quemoincement (I).

Ah ! Ol ét çheuqu'un Armand !

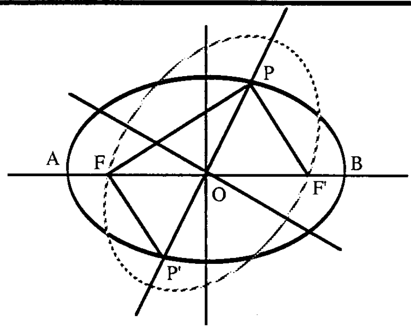
Mé vous âtres çh'étez si forts, étez vous capablle de fére la minme chouse ?

Idée mathématique : traditionnelle
Conception et texte en français : G.Bonnefond
Texte en poitevin : C.Chollet, revu et corrigé par U. Dubois et M.Renaud.
Illustration : Alain et Alexandra Saire

☞ Solution d'exercices :

LE JARDINIER (Exercice 1 donné dans le Corol'aire n°39)

Un jardinier doit faire un massif en forme d'ellipse. Il connaît l'emplacement et la longueur du grand axe AB. Le massif doit border le regard P d'une canalisation, c'est-à-dire que l'ellipse devra passer par le point P - ce point est situé à l'intérieur du cercle de diamètre AB et ne se trouve pas sur AB ni sur la médiatrice de AB.
Le jardinier dispose d'un cordeau de longueur AB terminé par deux piquets et de deux autres piquets. Dites comment il tracera son ellipse, sachant qu'il s'impose de ne pas planter de piquet à l'extérieur de la future ellipse. *Ann O'NYM*



Le jardinier trace P', symétrique de P par rapport au milieu O du segment AB. Soit F et F' les foyers de l'ellipse cherchée. PF' est égal à P'F par symétrie. Par suite : AB = PF + PF' = FP + FP' = F'P + F'P'.

F et F' se trouvent donc à l'intersection du segment AB et de l'ellipse de grand axe 2a = AB et de foyers P et P'. En traçant cette ellipse avec son cordeau, le jardinier détermine les points F et F'.

F et F' étant trouvés, le jardinier trace avec le même cordeau l'ellipse contour de son massif.

SÉRIE HARMONIQUE ET NOMBRES ENTIERS

Pour tout entier naturel non nul, on pose : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.
Quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 2, u_n n'est pas un nombre entier.

Une démonstration classique du résultat (Pierre Chevrier) :

Pour démontrer ce résultat, il suffit d'établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, u_n est le quotient d'un nombre impair et d'un nombre pair.
Pour cela, notons P(n) la propriété : "Quel que soit l'entier k tel que $2 \le k \le n$, il existe un entier impair i_k et un entier pair p_k tels que $u_k = \frac{i_k}{p_k}$ ", et démontrons par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, P(n) est vraie :
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons P(n) vraie.

* Si n est pair, alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} = \frac{i_n}{p_n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)\, i_n + p_n}{(n+1)\, p_n}$. (n+1) et i_n étant impairs, il en est de même de (n+1) i_n ; p_n étant pair, on en déduit que $(n+1)i_n + p_n$ est impair et que $(n+1)p_n$ est pair. P(n+1) est donc vraie.

* Si n est impair, posons n+1 = 2m.

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right).$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2}\,\frac{i_m}{p_m}.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient u_{n+1} sous la forme $u_{n+1} = \frac{2p_m \times k + i_m \times 3 \times \dots \times (2m-1)}{3 \times \dots \times (2m-1) \times 2p_m}$,
où k est un entier, donc $2\, p_m\, k$ un entier pair,
où $i_m \times 3 \times \dots \times (2m-1)$ est impair en tant que produit de nombres impairs,
où, par conséquent, le numérateur est impair et le dénominateur pair. P(n+1) est donc vraie.

* La propriété P(n) est donc héréditaire à partir du rang 2, et comme P(2) est vraie, car $u_2 = \frac{3}{2}$, on en conclut que la propriété P(n) est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

Autre solution

A) Étude préliminaire :

1) "...Tchebitchev .... [a démontré] une conjecture fameuse connue sous le nom de *postulat de Bertrand* (1845) :
***pour tout entier* n>3, *il y a au moins un nombre premier p tel que* n < p < 2n-2 "** .
(Les nombres premiers. Gérard Tennenbaum, Michel Mendès France - Que-sais-je N°571, 1997).
La démonstration de ce théorème est difficile. Nous nous contenterons d'utiliser le résultat ci-dessous !!

2) Propriété : Si $n \geq 3$ il existe un nombre premier p tel que $p < n < 2p$.
Preuve : a) si $n = 3, p = 2$; si $n = 4, p = 3$; si $n = 5, p = 3$.
b) si $n \geq 6$, n peut s'écrire $2m - 2$ s'il est pair et $2m - 1$ s'il est impair avec, dans ces deux cas, $m \geq 4$. D'après 1), il existe un nombre premier p tel que $m < p < 2m - 2$. D'où $2p > 2m > 2m-1 > 2m-2 > p > m$.
Par suite on a bien : $p < n < 2p$.
Exemples : $5 < 6 < 10$; $5 < 7 < 10$; $7 < 10 < 14$.

3) Deux propriétés de n!

3.1) Dans la décomposition en facteurs premiers de n!, $n \geq 2$, il existe au moins un facteur premier p dont la puissance est exactement 1.

a) Exemples : $2! = \mathbf{2}$; $3! = 2.3$; $4! = 2^3.3$; $5! = 2^3.3.5$; $6! = 2^4 3^2.5$

b) Preuve : Si $n \geq 3$, d'après le théorème de Tchebitchev cité au 1), il existe un nombre premier p tel que $p < n < 2p$.
Les nombres 2, 3,..., p-1, p+1, ... , n sont premiers avec p. Sinon ils seraient de la forme kp, $k \geq 2$, donc supérieurs à n, ce qui aboutit à une contradiction.
On peut écrire : si $n \geq 3$, $n! = p.K$, avec $K = 1.2...(p-1).(p-2)...n$, K premier avec p.

c) Dans la décomposition en facteurs premiers de n!, l'exposant de p est bien 1.

3.2) Propriété : Quel que soit n, $n \geq 2$, n! n'est jamais la puissance d'un entier.
Cette propriété est bien sûr une conséquence directe de 3.1). Elle est donnée à titre indicatif et ne sert pas pour la démonstration ci-dessous.

B) Propriété : Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, n entier , $n \geq 2$. u_n n'est pas un nombre entier.

1) Preuve : (*On pourra éventuellement examiner en premier l'exemple donné ci -dessous en 2)*)

a) Cas $n = 2$: $u_2 = \frac{3}{2}$

b) Cas $n \geq 3$: D'après A 3.1)b), il existe un nombre premier p tel que $n! = p.K$, $K = 1.2...(p-1).(p-2)....n$, et K premier avec p .

On peut écrire $K.u_n = \frac{K}{1} + \frac{K}{2} + ... + \frac{K}{p-1} + \frac{K}{p+1} + ...+ \frac{K}{n} + \frac{K}{p}$. La somme $S = \frac{K}{1} + \frac{K}{2} + ... + \frac{K}{p-1} + \frac{K}{p+1} + ...+ \frac{K}{n}$ est un nombre entier (somme de nombres entiers). Par contre le nombre $\frac{K}{p}$ est un rationnel non entier (p et K étant premiers entre eux). On a alors : $K.u_n = S + \frac{K}{p}$.

Si u_n était un nombre entier, le premier membre de cette égalité serait entier (produit de deux entiers K et u_n), le second membre ne le serait pas. On arriverait à une contradiction. Donc u_n n'est pas un nombre entier.

c) La propriété énoncée en B) est démontrée pour tout entier $n \geq 2$.

2) Exemple :

$$u_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \quad .$$

$$6! = 2^4.3^2.5 = 144 \;.5$$

$$144 \;.\; u_6 = 144 + \frac{144}{2} + \frac{144}{3} + \frac{144}{4} + \frac{144}{6} + \frac{\mathbf{144}}{\mathbf{5}}$$

$$144 \;.\; u_6 = 144 + 72 + 48 + 36 + 24 + \frac{\mathbf{144}}{\mathbf{5}}$$

$$144 \;.u_6 = 324 + \frac{\mathbf{144}}{\mathbf{5}}$$

Il est clair que u_6 ne peut être entier. $u_6 = \frac{49}{20}$.

Serge Parpay.

Exercice : **Petit bricolage** sur $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{3} + ...+ \frac{1}{n}$, n entier , $n \geq 2$.
On peut trouver facilement un entier n tel que u_n soit supérieur à un nombre N donné.
1) Soit par exemple u_{16} :

$$u_{16} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + ...+ \frac{1}{16})$$

$$u_{16} \geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{16}$$

$$u_{16} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$u_{16} \geq 1 + 4 \times \frac{1}{2}$$

2) On trouverait par le même procédé de calcul que $u_{2^n} \geq 1 + n \times \frac{1}{2}$. Pour $n \geq 2$ N, $u_n \geq$ N.

3) D'où le résultat classique : $\lim_{n \to \infty} u_n = + \infty$.

Bèla Mateur.