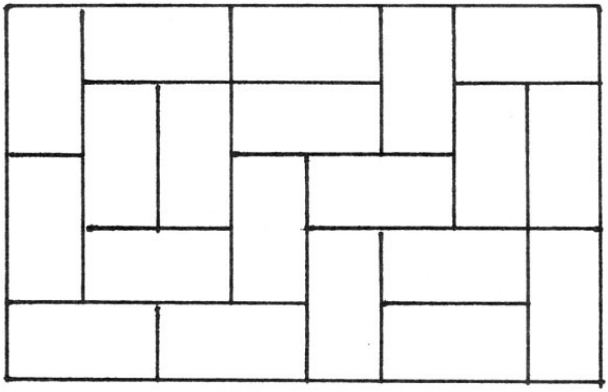
Problème du trimestre n° 58

Proposé par Claude PAGANO, de La Seyne Sur Mer



Ce rectangle de 5x8 est dallé par des 'dominos' (rectangles 2x1) ; il n'admet pas de 'ligne de fracture', c'est à dire qu'aucune droite ne peut le partager en deux rectangles dallés de dominos.
Quel est le plus petit rectangle possédant cette propriété (plus petit signifiant ici d'aire minimum) ?
Y a-t-il des carrés possédant cette propriété ?

Bernard PARZYSZ quitte la Lorraine pour Orléans. Nous le remercions pour l'aide qu'il a apportée à notre publication en prenant en charge, depuis plusieurs années, la rubrique "Problème du trimestre".
C'est désormais Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530-COURCELLES, qui lui succédera. Envoyez-lui vos solutions pour ce problème, ainsi que toute proposition de nouvel énoncé.

Solution du problème n° 57

Proposé par Richard BECZKOWSKI (Régionale de Bourgogne)

Rappel de l'énoncé :
Dans un triangle ABC du plan, les trois droites d_1, d_2 et d_3 sont respectivement :

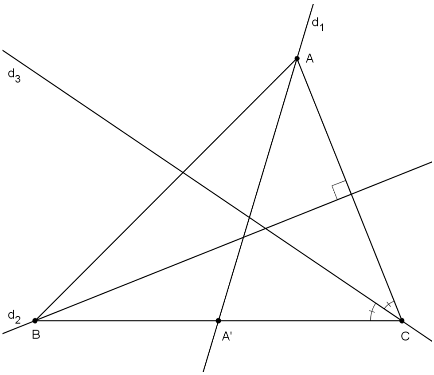
- la médiane relative à A,
- la hauteur relative à B,
- la bissectrice intérieure de l'angle C.

Retrouver le triangle ABC par la seule donnée de ces trois droites.

Nous avons reçu cinq solutions pour ce problème : une envoyée par mail par Hubert RINALDI (qui tient cette solution de Francisque DELORME, de Dakar), une de Michel BONN (Vandoeuvre), une de Renaud DEHAYE (lycée Varoquaux, Tomblaine), une de Claude PAGANO (La Seyne, Var), et une de l'auteur, fort détaillée, que nous publions ci-après.

Richard BECZKOWSKI utilise la notion de faisceau harmonique ou, ce qui revient au même, de couple de droites conjuguées par rapport à deux droites données. On peut adapter cette solution pour des élèves, en utilisant le lieu du milieu d'un segment, de direction fixée, dont les extrémités décrivent chacune une droite donnée.
C'est d'ailleurs la méthode utilisée pour construire le quatrième rayon d'une division harmonique quand on connaît les trois autres.

Au préalable, R.B. rappelle cette propriété ***: la médiane d'un triangle est conjuguée du côté auquel elle aboutit par rapport aux deux autres côtés***.



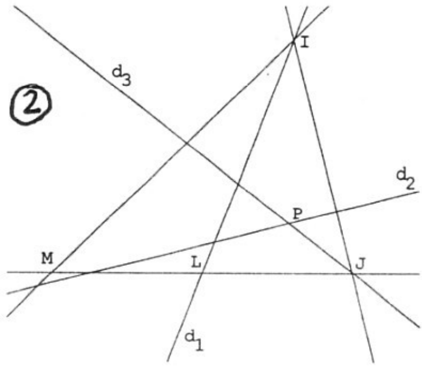
SOLUTION : la figure 1 précise le but à atteindre (problème supposé résolu). A' est le milieu de [BC]. L'intersection P des droites d_2 et d_3 existe, sinon l'angle ACB serait plat (la bissectrice d_3 étant alors perpendiculaire à (AC)).

Analyse

Les directions (AA') et (BC) sont conjuguées des directions (AB) et (AC). Les directions (PA') et (BC) sont conjuguées des directions (PB) et (PC), donc de celles de d_2 et d_3.

Synthèse

Par un point I, pris sur d_1, on mène la perpendiculaire (IJ)) à d_2 pour obtenir la direction de (AC).
Sa symétrique par rapport à d_3 donne la direction de (BC).



Si elle rencontre d_1 en L, et que M est le symétrique de J par rapport à L, alors (IM) est conjuguée de (IJ) par rapport au couple formé de d_1 et de la parallèle à (JM) menée par I (voir figure 2).

Nous connaissons maintenant les directions des trois côtés du triangle cherché, ce sont celles des côtés du triangle IJM, sous réserve du «bon fonctionnement» des constructions envisagées.

La droite (JM) rencontre d_3 en J et en général d_2 en N.

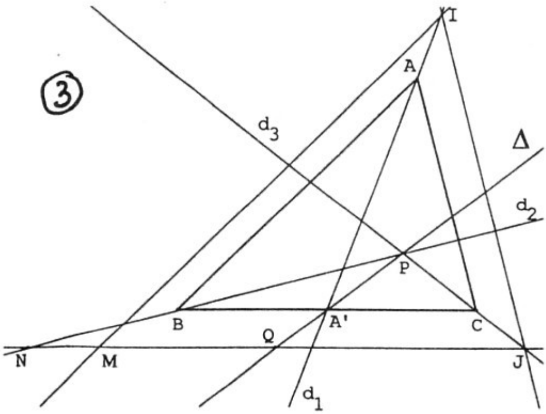
Si Q est le milieu de [JN] alors la conjuguée Δ de la parallèle à (BC) menée par P par rapport à d_2 et d_3 est (PQ).
Cette droite (PQ) rencontre en général d_1 en A', milieu de [BC].

La parallèle à (JN) menée par A' devrait rencontrer d_2 en B et d_3 en C.
Les parallèles à (IM) et (IJ) menées respectivement par B et C doivent se couper sur d_1 en A (voir figure 3).

Discussion

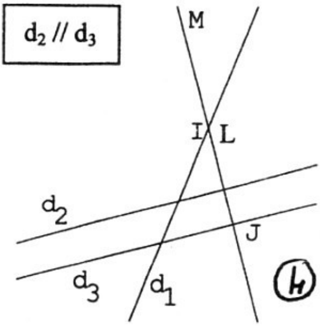
1. Les directions de (AB) et (BC), qui doivent être distinctes, ne peuvent être ni identiques ni orthogonales à celle de d_3. Cela nécessite donc que d_2 et d_3 ne soient ni **parallèles** (déjà vu), ni **perpendiculaires** (voir figures 4 et 5).

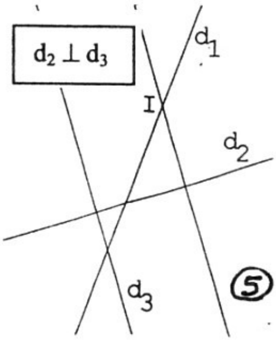
Dans ces conditions le point J existe, mais le point L part à l'infini si la symétrique de (IJ) par rapport à d_3 est de même direction que d_1. Il ne peut alors y avoir de triangle car la médiane d_1 devrait être

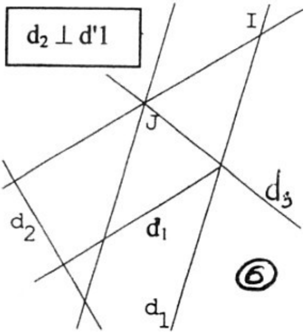


parallèle au côté auquel elle aboutit. Cela se produit si la symétrique d'_1 de d_1 par rapport à d_3 est perpendiculaire à d_2 (voir figure 6).
Ce dernier cas étant lui aussi éliminé, on est certain que, non seulement L existe mais aussi M, ce qui exclut que la direction obtenue pour (AB) soit celle de (BC).

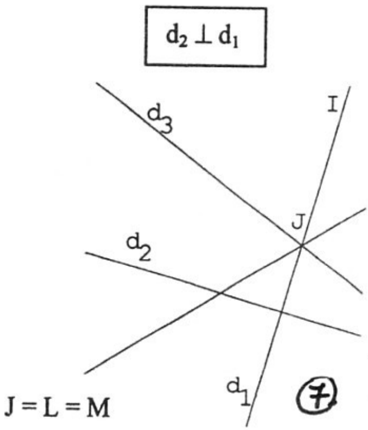
2. On doit s'assurer que la direction de (AB) donnée par (IM) est distincte de celle de (IJ). Les droites (IM) et (IJ) sont confondues si et seulement si (IL) et (IJ) le sont, donc quand d_1 est perpendiculaire à d_2 (voir figure 7).

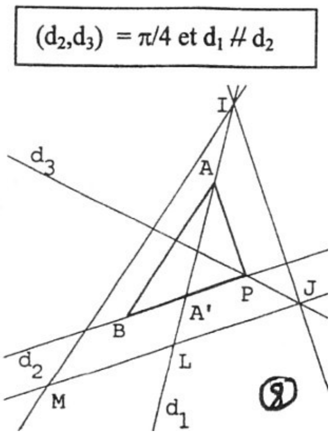






3. Le point N n'existe pas lorsque (JL) est perpendiculaire à (IJ) donc quand d_3 fait un angle de $\pi/4$ avec d_2 (voir figure 8).





4. Les droites Δ et d_2 sont alors confondues. Le point A',

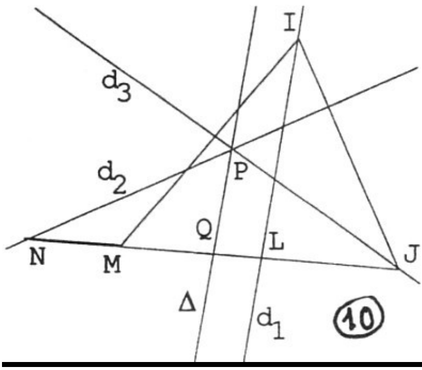
intersection de Δ et de d_1, existe quand d_2 et d_1 ne sont pas parallèles. Dans ce cas C est en P, B est symétrique de C par rapport à A', et ABC est rectangle en C.
Si d_1 et d_2 sont parallèles, le point M est rejeté à l'infini et le triangle IJM n'existe plus (voir

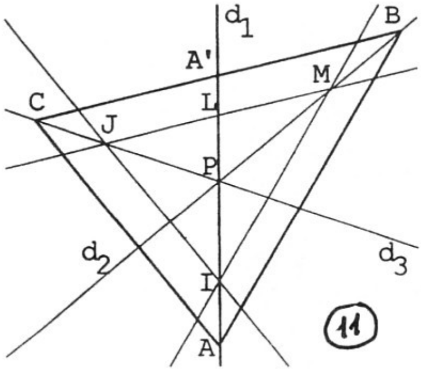
figure 9).

5. En dehors des cas particuliers qui viennent d'être passés en revue, les droites Δ et d_1 peuvent-elles être parallèles ?

Par rapport à d_2 et d_3, la droite Δ étant conjuguée de la parallèle à (JM) menée par P, la direction de d_1 est conjuguée de la direction de (JL).
La réponse à la question est donc : oui si la direction conjuguée de celle de d_1 par rapport à d_2 et d_3 se trouve être la symétrique par rapport à d_3 de la direction perpendiculaire à d_2 (voir figure 10).

6. Si en plus d1 passe par P, donc si les trois droites données sont concourantes, alors A' peut être pris quelconque sur d1, sauf en P. On a alors une infinité de triangles ABC, homologues l'un de l'autre par une homothétie de centre P (voir figure 11).

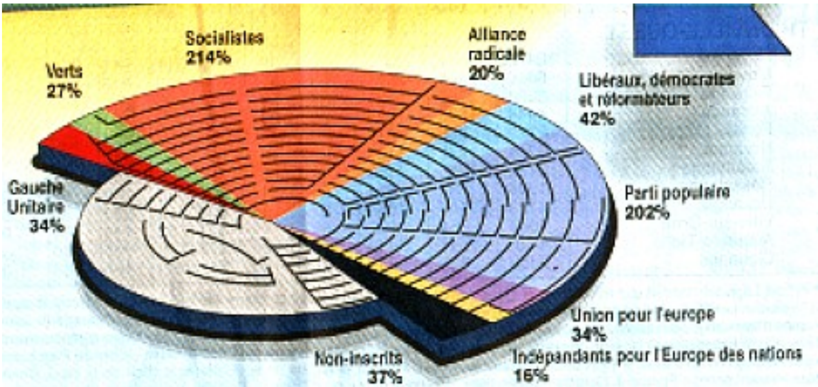




MATH ET MEDIA (SUITE)

22. Élections européennes

Comme vous pouvez le constater sur le graphique ci-dessous, extrait du “Républicain Lorrain” du lundi 14 juin, le parlement européen est constitué à ... 626% de députés. Histire de ne mécontenter personne ?



(suite page 22)