Problème du trimestre n° 55

L'énoncé est extrêmement court, et s'inspire d'un T.P. proposé par Luc TROUCHE (Montpellier) à ses élèves de terminale S. La façon dont ses élèves ont abordé ce problème est décrite dans la brochure « *Faire des mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques* », éditée par l'IREM de Montpellier, dont nous ne pouvons que vous recommander la lecture. Mais, de grâce, sautez les pages 17 à 23 avant d'avoir vous même résolu cette question !

**Par combien de zéros se termine 1998! (lire : factorielle 1998) ?
et 1999! ? et 2000! ?**

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ

EMPILEMENTS DE CYLINDRES

Rappel de l'énoncé (voir figure dans le PETIT VERT n°54 page 5) :

Une tour est formée de cylindres. Étage supérieur : un cylindre ; avant-dernier étage : un cylindre entouré par les cylindres accolés (soit 7 cylindres pour cet étage) ; étage juste en dessous : ceux de l'étage immédiatement au-dessus, entourés par les cylindres accolés ; et ainsi de suite...

Combien de cylindres seront nécessaires pour construire une tour de ce type de 9 étages ? pour une tour de n étages ?

Nous avons reçus trois courriers relatifs à ce petit problème : Richard CHERY (Collège de la Plante Gribbe, PAGNY SUR MOSELLE), Christian CHADUTEAU (Collège Les Avrils, SAINT MIHIEL) et François DROUIN (même collège), courriers comportant tous trois une solution exacte.

Appelons $u_1, u_2, \dots, u_n$ les nombre de cylindres nécessaires pour le 1^{er}, le 2^{ème}, ... le $n^{\text{ème}}$ étage, et S_n le nombre total de cylindres utilisés pour les n étages.

L'expérience montre que $u_1 = 1, u_2 = 7 (= 1+6), u_3 = 19 (= 1+6+12)$ etc. et que $S_n = n^3$.

Démonstration (n 'est pas au niveau du collège !!!) :

Le $n^{\text{ème}}$ étage est constitué du $(n-1)^{\text{ème}}$ étage entouré d'un « hexagone » comportant $(n-1)$ cylindres sur chacun de ses côtés.

D'où $u_n = 1 + 6*1 + 6*2 + \dots + 6*(n-1) = 1 + 6*n(n-1)/2 = 3n^2 - 3n + 1$.

Pour S_n , raisonnons par récurrence : supposons $S_{n-1} = (n-1)^3$.

Alors $S_n = S_{n-1} + u_n = (n-1)^3 + (3n^2 - 3n + 1) = n^3$. CQFD.

N.B. : il fallait 729 cylindres pour une tour de 9 étages.

Richard CHERY ajoute : « Excellent problème, que je soumettrai aux élèves de mon club... Il mériterait presque une parution dans le Petit Vert ». Voilà, c'est chose faite.

Solution du problème du trimestre n° 54

Les grilles de loto sont construites de la façon suivante : trois lignes et neuf colonnes. Sur ce damier, de 27 cases, on dispose de 15 cases blanches sur lesquelles on inscrira 15 nombres (tous différents) de 1 à 90 inclus. Il y a **toujours cinq** nombres dans chaque ligne.

Par contre, dans les colonnes, il y a soit 1, soit 2 nombres : il est aisé de vérifier qu'il y a nécessairement 6 colonnes comportant 2 nombres, et 3 colonnes comportant un seul nombre.

Dans la 1^{ère} colonne, on peut y mettre les neuf nombres de 1 à 9 ; dans la seconde colonne les dix nombres de 10 à 19 ; dans la 3^{ème} colonne les 10 nombres de 20 à 29, et ainsi de suite ; dans la 9^{ème} colonne, les onze nombres de 80 à 90. L'ordre « vertical » des nombres est important : sur l'exemple ci-dessus, la première colonne comporte les deux nombres 7 et 2 (dans cet ordre) ; ce n'est pas la même chose que si elle avait comporté 2 et 7 (en effet, on peut déjà gagner, au loto, en remplissant une ligne de cinq : c'est la « quine »).

En faisant toutes les hypothèses que vous jugerez nécessaires (à condition de les expliciter, et qu'elles ne soient pas contraires aux règles édictées ci-dessus), déterminer le nombre de cartes différentes qu'il est potentiellement possible d'imprimer.

Complément facultatif : habituellement, les cartes de loto sont fabriquées par séries de six,

Deux réponses seulement pour ce problème: l'une, conforme à l'énoncé, émanant de Renaud DEHAYE (54 Tomblaine) et une autre, qui ne tient pas compte du fait qu'"il y a toujours cinq nombres dans chaque ligne". J'ai en outre reçu un complément d'information sur les cartes de loto, transmis par François DROUIN (55 Saint-Mihiel).

Rappelons qu'il y a 15 cases blanches à déterminer parmi les 27 possibles sur la carte, avec les deux contraintes suivantes:

- 5 cases blanches par ligne
- 1 ou 2 cases blanches par colonne.

A- Nombre de façons de disposer les cases blanches.

R. Dehaye raisonne sur les lignes de la carte: il commence par placer les 5 cases blanches (notées par un X) de la première ligne ($C_9^5 = 126$ façons):

		X	X		X		X	X

Puis il place les 5 cases blanches de la deuxième ligne, en distinguant leur disposition selon le nombre n de colonnes où apparaissent alors deux X, n pouvant a priori varier entre 1 et 5. Par exemple, sur le schéma ci-dessous, on a $n = 3$ (colonnes 4, 6 et 8):

Au total, le nombre de façons de disposer les cases blanches sur la carte est donc: $126 [(20.1) + (60.4) + (40.15) + (5.56)] = 143\ 640$.

B- Nombre de façons de remplir les cases.

(N.B.: R. Dehaye utilise ici un raisonnement probabiliste, mais je préfère continuer à utiliser les dénombrements; j'espère qu'il ne m'en tiendra pas rigueur.)

Remarquons tout d'abord que:

- dans tous les cas, 6 colonnes comportent deux X et 3 comportent un X
- on a 10 nombres possibles pour chaque colonne, sauf pour la première (9 nombres) et la dernière (11 nombres).

Cette particularité des colonnes 1 et 9 nous amène à considérer 4 cas:

- cas 1: un seul X dans les colonnes 1 et 9
- cas 2: un X dans la colonne 1 et deux X dans la colonne 9
- cas 3: deux X dans la colonne 1 et un X dans la colonne 9
- cas 4: deux X dans les colonnes 1 et 9.

Il s'agit donc de ventiler les 143 640 façons recensées au A entre ces 4 cas. Le problème se ramène à deux tirages sans remise d'une colonne parmi 9, 6 colonnes étant à deux X et 3 colonnes étant à un seul X. Il y a donc en tout $A_9^2 = 72$ résultats possibles, également répartis parmi les 143 640 façons (principe de symétrie). Chacun des 72 résultats correspond donc à $143\ 640 : 72 = 1\ 995$ façons.

- a) cas 1: il correspond à $A_3^2 = 6$ résultats, soit $1\ 995 \times 6 = 11\ 970$ façons
- b) cas 2 et cas 3: ils correspondent chacun à $A_3^1 \cdot A_6^1 = 18$ résultats, soit $1\ 995 \times 18 = 35\ 910$ façons
- c) cas 4: il correspond à $A_6^2 = 30$ résultats, soit $1\ 995 \times 30 = 59\ 850$ façons.

Il s'agit maintenant de placer les nombres dans les cases (on commence par les colonnes à un seul X):

- a) cas 1: $A_9^1 \cdot A_{11}^1 \cdot A_{10}^1 \cdot (A_{10}^2)^6 = 52\ 612\ 659 \times 10^7$ façons de placer les nombres, à multiplier par 11 970, nombre de façons de placer les cases.
- b) cas 2: $A_9^1 (A_{10}^1)^2 (A_{10}^2)^5 A_{11}^2 = 58\ 458\ 510 \times 10^7$, à multiplier par 35 910.
- c) cas 3: $A_{11}^1 (A_{10}^1)^2 (A_{10}^2)^5 A_9^2 = 46\ 766\ 808 \times 10^7$, à multiplier par 35 910
- d) cas 4: $(A_{10}^1)^3 (A_{10}^2)^4 A_9^2 A_{11}^2 = 51\ 963\ 120 \times 10^7$, à multiplier par 59 850.

Il ne reste plus qu'à calculer:

$[(52\ 612\ 659 \times 11\ 970) + (58\ 458\ 510 \times 35\ 910) + (46\ 766\ 808 \times 35\ 910) + (51\ 963\ 120 \times 59\ 850)] \times 10^8$
soit **751 840 742 961 $\times 10^8$** cartes différentes possibles.

N.B.: R. Dehaye s'est aussi attaqué au "complément facultatif". Il trouve qu'on peut fabriquer (accrochez-vous!):

14493453763514332884384670065505446627222125652625970079032376620717316469948416x10²⁷
séries différentes de 6 cartes.

P.S.: F. Drouin m'a fait parvenir, de la part de Georges BORION, un travail du groupe "Jeux" de l'APMEP, qui a repéré quelques particularités des jeux de loto du commerce. Voici donc:

1) Les cartes sont classées par numéro de 1 à 96, et par séries de 6 (repérées par leur couleur et numérotées de 1 à 16).

2) Les cartes de 1 à 48 (resp. de 49 à 96) portent comme "premier nombre" (à gauche sur la ligne supérieure) le numéro de la carte (resp. le numéro de la carte diminué de 48).

3) Il y a toujours 5 nombres par ligne, et donc 15 nombres par carte.

4) Chacune des 16 séries de 6 cartes comporte une fois et une seule chacun des nombres de 1 à 90 ($15 \times 6 = 90$).

5) Les cartes de 1 à 48 semblent construites selon une structure logique déterminée. En particulier, il n'y a pas de "quines" (lignes de 5 numéros) communes.

6) Par contre, il est plus difficile de discerner une structure logique pour les cartes numérotées de 49 à 96. En particulier, les cartes 16 et 64, ainsi que 17 et 65, présentent des quines communes:

- les cartes 16 et 64 ne diffèrent que par un seul nombre (elles ont donc deux quines communes);

- les cartes 17 et 65 diffèrent par 3 nombres (et présentent une quine commune).

Dernière minute :

Nous avons reçu une réponse tardive de Pol LE GALL, qui trouve bien le nombre de 75 184 074 296 100 000 000 cartes possibles. Et il ajoute le commentaire suivant :

Si nous mobilisons tous les habitants de la planète, et que nous supposons qu'ils parviennent (après un entraînement performant) à réaliser une carte par minute, en travaillant sans cesse, il suffira de 24 000 ans pour achever de remplir toutes ces cartes. Si ces cartes ont une épaisseur de 1 mm et les dimensions qu'elles avaient dans l'énoncé du précédent Petit Vert, à l'issue de cette entreprise une gangue de plus de 1 mètre d'épaisseur couvrira le globe.

Pour ce qui est du complément facultatif, Pol nous fait savoir ceci :

Le décompte de tous les cas possibles, suivant une démarche analogue à celle de la 1^{ère} question (...) devrait mobiliser les habitants de la planète pendant quelque temps ; or ils sont occupés pour 24 000 ans par la vérification de la réponse à cette première question.