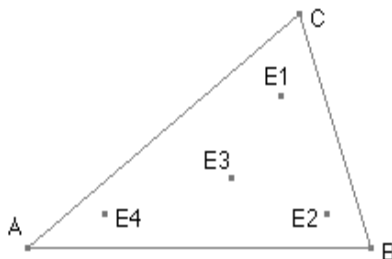


Problème du trimestre n° 56

Proposé par Claude PAGANO, de La Seyne Sur Mer

Quatre étudiants "planchent" dans une salle triangulaire. Où doivent-ils se placer pour qu'ils soient le plus loin possible les uns des autres ? C'est à dire que la distance séparant les deux qui sont le plus proches soit la plus grande possible ? Et si on voulait y mettre cinq étudiants ? Et cinq étudiants dans une salle quadrangulaire (quelconque) ?



Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

Solution du problème du trimestre n° 55

Par combien de zéros se termine 1998! (lire : factorielle 1998) ?
et 1999! ? et 2000! ?

Nous avons reçu 3! + 1 solutions pour ce problème, dont les auteurs sont Richard BECZKOWSKI (71 Châlon-sur-Saône), Jérôme CARDOT (29 Brest), Roger CARDOT (54 Villers-lès-Nancy), Pol LE GALL (57 Courcelles-Chaussy), Claude PAGANO (83 La Seyne-sur-Mer), Eric SIGWARD (57 Sarreguemines) et Jacques VERDIER (54 Tomblaine).

Commençons par remarquer:

a) que le nombre de zéros à la droite de l'écriture décimale d'un entier N est l'exposant de la plus grande puissance de 10 qui divise N

b) qu'un entier N est multiple de 10^n si, et seulement si, N est multiple de 2^n et de 5^n

c) que $N!$ est divisible par tout entier inférieur ou égal à N .

Il résulte de ces remarques que, si dans la suite des entiers inférieurs ou égaux à $N!$ on rencontre un terme de la forme $k \cdot 5^n$, on a déjà rencontré précédemment le terme $k \cdot 2^n$ qui lui est inférieur (car $2^n < 5^n$). Par conséquent c'est l'exposant de 5 dans la décomposition de $N!$ en facteurs premiers qui détermine la puissance de 10 qui divise $N!$. Autrement dit, si i est le plus grand entier tel que 5^i divise $N!$, le

nombre de zéros cherché est égal à i .

Première solution (J. Cardot, R. Cardot, P. Le Gall).

On remarque que, pour tout entier inférieur ou égal à N :

- chaque multiple de 5 produit un zéro
- chaque multiple de $5^2 (= 25)$ produit un zéro supplémentaire
- chaque multiple de $5^3 (= 125)$ produit un zéro supplémentaire
- chaque multiple de $5^4 (= 625)$ produit un zéro supplémentaire.

Par conséquent, comme $1998 = 399.5 + 3$, il y a, parmi les entiers inférieurs ou égaux à 1998, 399 multiples de 5, fournissant au total 399 zéros.

De même, $1998 = 79.25 + 23$, donc il y a 79 multiples de 25, fournissant 79 zéros supplémentaires.

De même, $1998 = 15.125 + 123$, donc il y a 15 multiples de 125, fournissant un zéro supplémentaire.

Enfin, $1998 = 3.625 + 123$, donc il y a 3 multiples de 625, qui fournissent un zéro supplémentaire.

Donc le nombre de zéros cherché est $i = 399 + 79 + 15 + 3 = 496$.

Par conséquent, l'écriture décimale de $1998!$ se termine à droite par 496 zéros.

On trouve le même résultat pour l'écriture décimale de $1999!$, et, pour celle de $2000!$, $i = 400 + 80 + 16 + 3 = 499$ zéros à droite.

Deuxième solution (J. Cardot). On aura sans doute remarqué le lien entre ce qui précède et l'écriture d'un nombre entier en base cinq.

En effet, 1998 s'écrit $\overline{30443}$ en base cinq. On en déduit qu'il y a $\overline{3044}$ (soit 399) multiples de 5 parmi les nombres inférieurs ou égaux à 1998. De même, il y a $\overline{304}$ (soit 79) multiples de 2, $\overline{30}$ (soit 15) multiples de 125, et enfin $\overline{3}$ (soit 3) multiples de 625 parmi ces nombres. Donc, au total, $399 + 79 + 15 + 3$ zéros à droite dans l'écriture décimale de $1998!$.

De même, 1999 s'écrit $\overline{30444}$ en base cinq, d'où un nombre de zéros égal à $\overline{3044} + \overline{304} + \overline{30} + \overline{3} = \overline{3441}$ (soit 496).

Enfin, 2000 s'écrit $\overline{31000}$ en base cinq, d'où un nombre de zéros égal à $\overline{3100} + \overline{310} + \overline{31} + \overline{3} = \overline{3444}$ (soit 499).

Troisième solution (R. Beczkowski, C. Pagano, E. Sigward). Le plus grand multiple de 5 contenu dans N est évidemment $5.E(N/5)$, où E désigne la fonction partie entière. Par conséquent $N!$ est divisible par $5^{n_1} \cdot \prod_{k=1}^{n_1} k = 5^{n_1} \cdot n_1!$, où $n_1 = E(N/5)$.

Le nombre $n_1!$ est lui-même (en général) un multiple de 5. En recommençant comme ci-dessus avec n_1 au lieu de N , on trouve que $n_1!$ est divisible par

$$5^{n_2} \cdot \prod_{k=1}^{n_2} k = 5^{n_2} \cdot n_2!, \text{ où } n_2 = E(n_1/5).$$

Considérons maintenant la suite (n_p) définie par $n_0 = N$ et $n_{p+1} = E(n_p/5)$. Elle est strictement décroissante et, comme elle ne prend que des valeurs entières, elle est finie. Soit n_r le dernier terme non nul de cette suite. D'après ce qui précède, $N!$ est divisible par 5^i , où $i = \sum_{k=1}^r n_k$ et, par construction, il s'agit là de la plus grande puissance de 5 (donc aussi de 10) qui divise $N!$.

Si nous déterminons la suite (n_p) pour $N = 1998$, nous obtenons

n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1998	399	79	15	3	0

On en déduit $i = 399 + 79 + 15 + 3 = 496$. Par conséquent, l'écriture décimale de $1998!$ se termine à droite par 496 zéros.

N.B.: Pour $N = 1999$, on obtient la même suite à partir de n_1 , donc le même résultat.

Pour $N = 2000$, on obtient:

n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
2000	400	80	16	3	0

D'où $i = 400 + 80 + 16 + 3 = 499$ (les 3 zéros supplémentaires sont, bien évidemment, ceux de 2000).

Quatrième solution (R. Cardot, P. Le Gall, J. Verdier). On fait calculer et afficher $1998!$ par un logiciel, puis on compte les zéros demandés. Voir ci-après l'écriture décimale de $1998!$ par Maple (PLG).

JV précise le programme qu'il a utilisé sur TI 89, appelé zerofact et exécuté par l'instruction zerofact(n):

```

zerofact(n)
Prgm
n→q : 0→k
While q≥5
  int(q/5)→q
  k+1→k
EndWhile
Σ(int(n/5^j),j,1,k)→z
ClrIO
Disp "Il y a",z,"zéros dans
factorielle",n
EndPrgm

```

Si on appelle le programme en tapant par exemple zerofact(1998), on obtient instantanément la réponse suivante à l'écran :

FS	Pr3mB	Test
Il y a		
496		
zéros dans factorielle		
1998		
PRGMS	DEG AUTO	FUNC 2/39

Remarque de la rédaction :

On peut ainsi montrer qu'il y a 249 zéros dans 1 000 !, 249 998 zéros dans 1 000 000 !
et 249 999 998 zéros dans 1 000 000 000 !

Curieux, non ?

Remarque à propos de la TI-89 : elle
peut calculer , en valeur exacte avec
tous les chiffres, jusqu'à 299!

Mais le résultat n'est pas facile à lire ;
voici de début de ce nombre de 613
chiffres terminé par 72 zéros :

1	0	2	0	1	9	1	7	0	7	3	8	8	1	3	5	4	5	3	4	5	1	2	3
4	8	7	0	9	9	0	8	9	5	4	3	1	2	9	5	2	9	6	0	1	3	9	1
1	9	2	3	3	3	1	3	8	9	2	5	5	8	0	4	1	9	8	2	5	5	1	1
0	5	0	9	0	5	6	2	2	4	8	5	0	5	0	9	7	1	4	0	8	2	5	
8	5	7	7	8	3	3	1	3	0	4	9	2	9	6	2	3	3	9	0	8	7	8	9
6	2	1	4	2	1	3	0	2	5	8	6	3	3	4	3	8	4	7	4	2	2	8	0
9	7	5	9	6	8	9	9	1	5	1	9	9	4	7	0	7	5	1	5	8	9	7	6
7	5	7	3	1	8	2	0	1	3	3	6	0	0	4	0	7	1	9	2	5	4	1	7
3	9	2	2	8	4	7	5	1	9	8	8	4	5	2	3	0	1	1	6	8	9	2	9
3	7	5	0	8	8	1	0	7	2	9	8	7	5	4	7	6	6	4	5	5	0	6	8
1	6	8	4	1	0	2	1	0	1	0	0	7	2	5	0	7	4	7	8	9	8		

MAIN  RAD AUTO FUNC 2/30