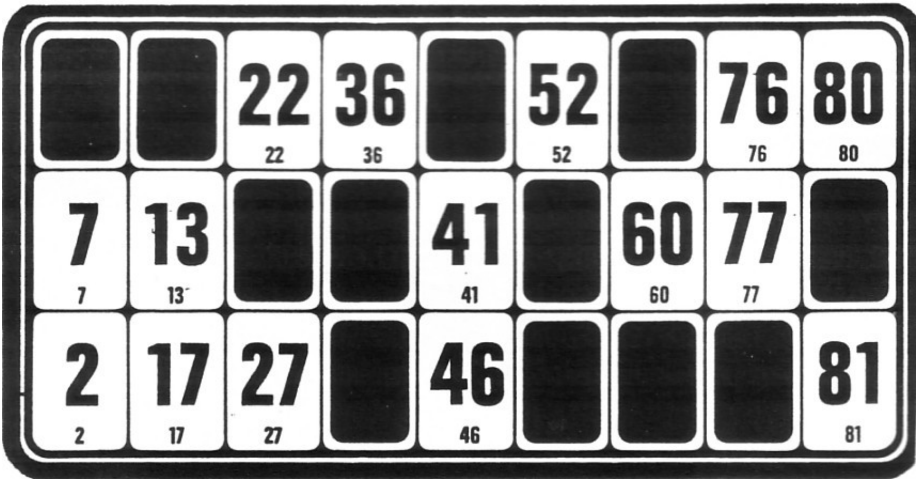
Problème du trimestre n° 54

Énoncé proposé par Claude RAVIER

Les grilles de loto sont construites de la façon suivante : trois lignes et neuf colonnes. Sur ce damier, de 27 cases, on dispose de 15 cases blanches sur lesquelles on inscrira 15 nombres (tous différents) de 1 à 90 inclus. Il y a **toujours cinq** nombres dans chaque ligne.

Par contre, dans les colonnes, il y a soit 1, soit 2 nombres : il est aisé de vérifier qu'il y a alors nécessairement 6 colonnes comportant 2 nombres, et 3 colonnes comportant un seul nombre.

Dans la 1ère colonne, on peut y mettre les neuf nombres de 1 à 9 ; dans la seconde colonne les dix nombres de 10 à 19 ; dans la 3ème colonne les 10 nombres de 20 à 29, et ainsi de suite ; dans la 9ème colonne, les onze nombres de 80 à 90. L'ordre « vertical » des nombres est important : sur l'exemple ci-dessous, la première colonne comporte les deux nombres 7 et 2 (dans cet ordre) ; ce n'est pas la même chose que si elle avait comporté 2 et 7 (en effet, on peut déjà gagner, au loto, en remplissant une ligne de cinq : c'est la « quine »).



En faisant toutes les hypothèses que vous jugerez nécessaires (à condition de les expliciter, et qu'elles ne soient pas contraires aux règles édictées ci-dessus), déterminer le nombre de cartes différentes qu'il est possible d'imprimer.

<u>Complément facultatif</u> : habituellement, les cartes de loto sont fabriquées par séries de six, de telle sorte que chacun des 90 numéros ne se trouve que sur une carte et une seule. Combien de telles séries de six cartes est-il possible de fabriquer ?

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ

Solution du problème n°53
Énoncé proposé par Pascal BERTIN

Quatre villes sont disposées aux quatre sommets d'un carré. On désire les relier entre elles par un réseau routier constitué de tronçons rectilignes, de façon que chaque ville puisse être reliée aux trois autres. En voici deux exemples :

Il s'agit de chercher un tel réseau, dont la longueur totale soit aussi petite que possible. Que proposez vous ?

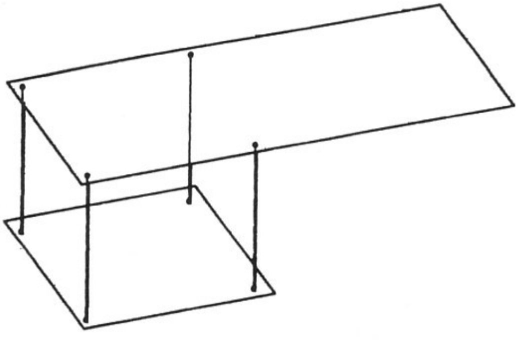
Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ

Quatre solutions nous sont parvenues pour ce problème, dont les auteurs sont Renaud DEHAYE (88 Epinal), François DROUIN (55 Saint-Mihiel), Claude PAGANO (83 La Seyne-sur-mer) et Claude RAVIER (88 Neufchâteau). Voici la synthèse de ces réponses.

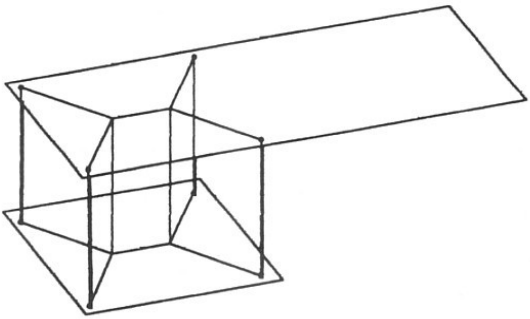
Rappelons qu'il s'agissait en fait de trouver la ligne de longueur minimale reliant 4 points A, B, C, D du plan, disposés en carré.

1) Approche expérimentale.

L'idée consiste à "gonfler" le problème en dimension 3: considérons en effet un pavé droit à base carrée, et cherchons une surface d'aire minimale contenant les 4 arêtes du pavé qui sont perpendiculaire aux bases.



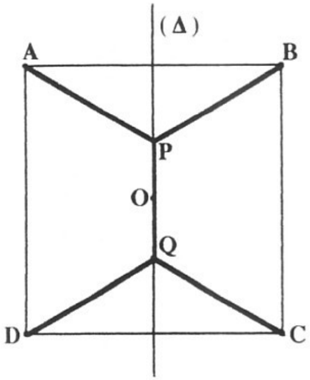
Les bulles de savon sont expertes dans l'art de trouver des surfaces d'aire minimale, et, justement, C. Pagano m'a fait parvenir un objet constitué de deux plaques de plexiglass maintenues parallèles par 4 fils de cuivre disposés en carré (voir *fig. 1*).



Lorsque j'ai, selon ses instructions, trempé l'objet dans de l'eau savonneuse, il s'est formé, en le retirant, une pellicule ayant la forme de demi-prismes droits à base hexagonale (du type des alvéoles de cire d'abeille, *fig.* 2). Il s'agissait donc là de la surface d'aire minimale contenant les 4 tiges de cuivre.

Si h est la hauteur du prisme, et l la longueur de la section de la surface avec le plan de base, l'aire A de cette surface bien sûr A = lh, et, puisque h est fixé et que A est minimale, il en est de même pour l. La courbe cherchée a donc la forme d'un >-< , dont les axes de symétrie sont les médianes du carré initial.

2) <u>Approche analytique</u>.



Cherchons maintenant à préciser la position des "nœuds" P et Q de la courbe ainsi déterminée de façon expérimentale (*fig. 3*). Soit O le centre du carré ABCD, et (Δ) la médiatrice de [AB]. Il s'agit de déterminer pour quelle(s) position(s) de P et Q la somme d = AP + PB + QC + QD + PQ est minimale.

En posant AB = $2a$ et OP = x il vient, pour $0 \leq x \leq a$:

$$d = 2x + 4\sqrt{a^2 + (a-x)^2}$$

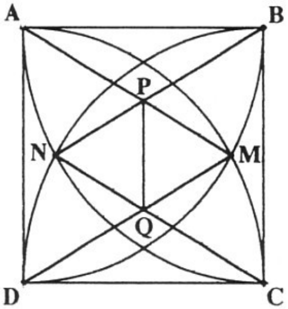
La fonction f, définie sur $[0; a]$ par $f(x) = x + 2\sqrt{a^2 + (a-x)^2}$, admet un minimum pour la valeur x_0 telle que $a - x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, soit $x_0 = (1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}})a$.

On a alors $d = 2f(x_0) = 2(1+\sqrt{3})a \approx 5{,}46a$.

(On remarquera que la courbe en U de l'énoncé donne $d = 6a$, et que la courbe en X donne $d = 4a\sqrt{2} \approx 5,66a$.)

N.B.: R. Dehaye a obtenu expérimentalement la valeur minimale $5,4641a$ à l'aide du logiciel Géoplan, en faisant varier P et Q sur (Δ).

3) Construction.



On peut remarquer *(fig. 3)* qu'on a $tan\ \widehat{PAD} = \dfrac{a}{a - x_0} = \sqrt{3}$, donc $\widehat{PAD} = 60°$.

D'où la construction des points P et Q à la règle et au compas *(fig. 4)*: on trace les triangles AMD et BNC, et P (resp. Q) est l'intersection de (AM) et (BN) (resp. (CN) et (DM)).

4) R. Dehaye pose la question suivante: *les points P et Q sont-ils les points de Fermat respectifs des triangles AOB et COD ?* La réponse est évidemment oui. Rappelons que le point de Fermat (ou de Torricelli) d'un triangle est le point du plan qui minimise la somme des distances aux sommets de ce triangle. Or, la somme des distances du point P aux sommets du triangle AOB n'est autre que $f(x_0)$. (Pour plus de renseignements sur le point de Torricelli, on pourra consulter par exemple *La géométrie du triangle*, de Y. et R. Sortais. Ed. Hermann 1987).

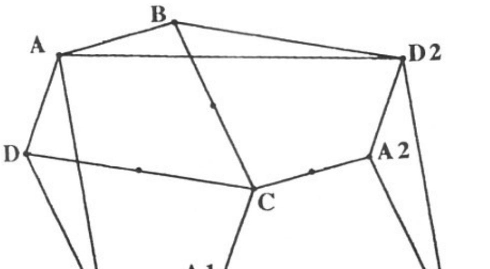
5) C. Ravier évoque la généralisation du problème au cas du rectangle (et il signale que l'expérience des bulles de savon est visible à la Cité des Sciences de La Villette). Si l'on reprend le problème avec un rectangle dont les côtés ont pour longueurs $2a$ et $2b$ $(a \leq b)$, on trouve $x_0 = b - \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, valeur qui fournit encore un angle $\widehat{PAD}$ valant 60°.

6) Enfin, F. Drouin indique que ce problème est une forme du problème de Steiner, traité dans *Mathématiques et formes optimales*, de S. Hildenbrandt et A. Tromba (Ed. Belin, coll. Pour la Science), ouvrage qui fait partie de la bibliothèque de la Régionale. Il signale également que l'expérience des bulles de savon faisait partie de l'exposition itinérante *Horizons mathématiques*, qui a circulé il y a quelque temps en Lorraine.

Solution complémentaire du problème n°52

ÉNONCÉ : Le numéro spécial « NOMBRES » de LA RECHERCHE (n°278, juillet-août 1995) indique un méthode utilisée par les paysans du Nordeste brésilien :
« Pour trouver l'aire d'une parcelle ayant la forme d'un quadrilatère, ils multiplient la demi-somme des longueurs de deux côtés opposés par la demi-somme des longueurs des deux autres côtés opposés. »
Existe-t-il des quadrilatères autres que le rectangle pour lesquels cette méthode est exacte ?

Nous avons reçu une solution « originale » de Jérôme CARDOT (Brest), trop tardivement pour pouvoir la publier dans notre numéro 53 de mars. La voici :



Soit ABCD un quadrilatère non croisé, et qui ne soit pas un parallélogramme. A partir des symétries centrales par rapport aux milieux des côtés, on peut construire le début d'un pavage du plan par des quadrilatères superposables à ABCD ; on obtient ainsi le schéma ci-contre.
On peut remarquer que $AB_1D_1D_2$ est un parallélogramme (de centre C). De plus, son aire est quadruple de celle de ABCD : en effet, les triangles ADB_1 et $D_2A_2D_1$ sont translatés l'un de l'autre, de même que ABD_2 et $B_1A_1D_1$.

D'autre part, les dimensions de ce parallélogramme vérifient les inégalités suivantes :

$$AD_2 \leq AB + BD_2 = AB + DC$$
$$AB_1 \leq AD + DB_1 = AD + BC.$$

En outre, l'égalité n'est vérifiée que si les deux côtés opposés du quadrilatère

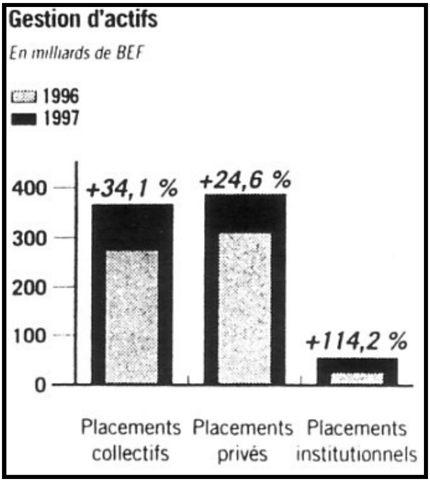
ABCD sont parallèles, c'est-à-dire s'il s'agit d'un parallélogramme.
D'après l'hypothèse faite, l'inégalité est donc ici stricte.

Il vient alors : $\mathit{aire}(AB_1D_1D_2) \leq AD_2 \times AB_1 < (AB + DC)(AD + BC)$,
d'où : $\mathit{aire}(ABCD) < \frac{1}{4}(AB + DC)(AD + BC)$.

On en conclut :
1° que seuls les rectangles vérifient la formule proposée,
2° que pour les autres quadrilatères l'aire réelle est plus petite.

MATH ET MÉDIA (encore !!!)

Nous avons trouvé, dans la presse hebdomadaire, une double page de publicité pour DEXIA France, double page remplie de graphiques statistiques de toutes sortes (histogrammes, camemberts, graphiques d'évolution chronologique, etc...). De quoi faire travailler les élèves de tous niveaux (du collège à la terminale ES ou STT). Parmi ces graphiques, celui-ci a retenu toute mon attention. Etudiez-le attentivement, et dites ce que vous en pensez...



Jacques VERDIER