LES CARROÏDES

ou des pistes d'activités pour tous les âges…

Des cycloïdes…

Tout le monde connaît sans doute le principe des cycloïdes, épi- et hypo-. Rappelons-le pour les quelques lecteurs distraits qui auraient la flemme de partir à la recherche du dictionnaire certainement perdu sous une pile de copies, à moins qu'il ne serve à caler le pied du bureau ou que le chat ne se soit assoupi dessus.

Reprenons donc les définitions proposées dans le précieux Dictionnaire des Mathématiques des P.U.F.

"cycloïdes : famille de courbes engendrées par un point du plan d'un cercle roulant sans glisser sur une droite ou sur un autre cercle. Ce sont des roulettes. On distingue la cycloïde proprement dite, les épicycloïdes, les hypocycloïdes, les cycloïdes rallongées ou raccourcies ainsi que les épitrochoïdes et les hypotrochoïdes. Ces diverses courbes étaient appelées autrefois trochoïdes."

Voilà ce qui s'appelle définir un concept !

Pour faire simple (au risque d'être taxé de vulgarisation déplacée) : soit C un cercle de centre O et de rayon r. Soit M un point du cercle, on s'intéresse à la trajectoire de M quand C roule sur … une droite (cycloïde simple), …un cercle à l'extérieur de celui-ci (épicycloïde), …un cercle à l'intérieur de celui-ci (hypocycloïde). Si on s'intéresse à un point M' tel que OM'<r, on raccourcit la cycloïde, si M' vérifie OM'>r, on la rallonge.

Blaise Pascal, et quelques uns de ses correspondants favoris (Mersenne, Torricelli..) se sont beaucoup intéressés à ces courbes.

…aux carroïdes

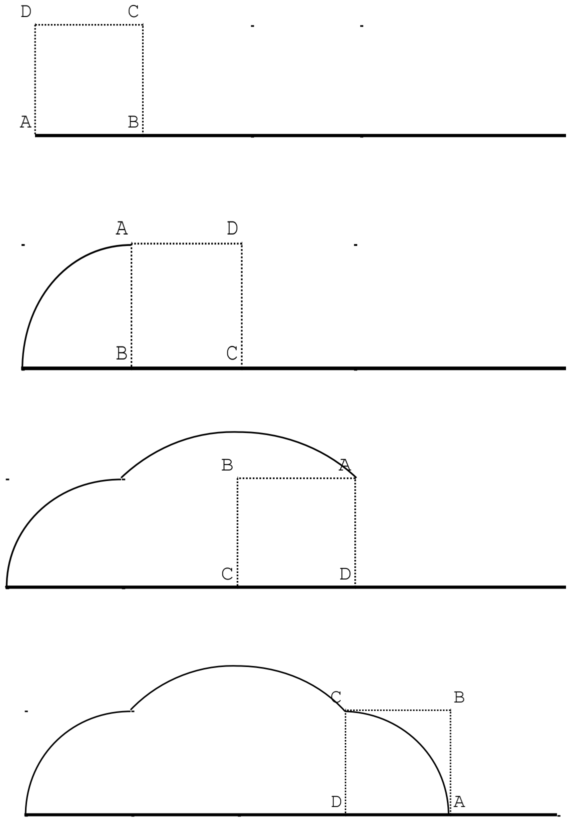
On se propose ici de découvrir une nouvelle famille de courbes, inspirées des épi-hypo-cycloïdes, les carroïdes, dont le principe est enfantin : au lieu de faire rouler des cercles sur et dans des cercles, faisons "rouler" des carrés sur et dans des carrés.

Considérons, pour bien comprendre, la "carroïde simple", obtenue comme trajectoire d'un sommet d'un carré tournant sur une droite.

On suit la trajectoire du point A. Le carré pivote autour du point B, Le côté [BC] se "pose" sur la droite et le point A décrit un arc de cercle qui le mène à l'ancienne position du point C.

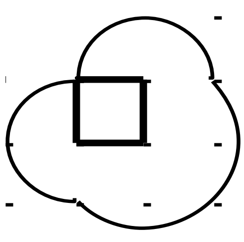
Le carré pivote ensuite autour du point C. Le côté [CD] se pose sur la droite, et A décrit un arc de cercle de rayon CA.

Le carré pivote autour de D, le côté [DA] se pose sur la droite, A décrit un quart de cercle de centre D et de rayon le côté du carré.

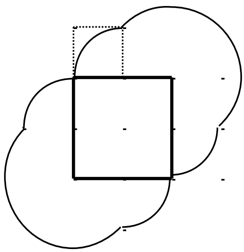


A l'étape suivante, le carré pivote autour de A, qui ne bouge donc pas. Le carré se retrouve alors dans la position initiale, et la suite de la trajectoire s'obtient par translation.

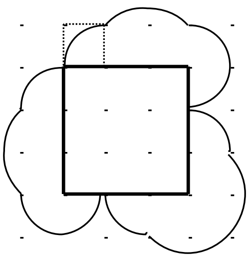
L'idée étant posée, le champ d'exploration est ouvert. On peut



n=1



n=2



n=3

s'intéresser, par exemple, au cas particulier du carré de côté 1 tournant autour du carré de côté n.

Diverses questions peuvent surgir : y a-t-il toujours des éléments de symétrie ? lesquels ? quelle est la longueur de la courbe obtenue ?

Selon la classe où l'on place l'activité, celle-ci peut poursuivre des objectifs variés : calculs de longueurs, symétrie, rotation, dessin, récurrence…

Considérons de plus près le problème de la longueur de la courbe. Les calculs nous conduisent aux résultats suivants.

n=1

La courbe obtenue (qui correspond à la cardioïde, tandis que le cas n=2 correspondrait à la nephroïde…) est constituée de deux demi-cercles de rayon 1, et d'un demi-cercle de rayon √(2). La longueur est donc : $L_1 = \pi.(2+\sqrt{(2)})$.

n=2

La courbe est constituée de quatre quarts de cercle de rayon 1 et de quatre quarts de cercle de rayon √2. La longueur est : $L_2 = \pi\ (2+\sqrt{(2)})$

n=3

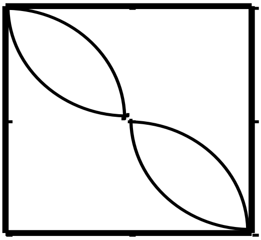
La courbe obtenue est constituée de huit quarts de cercle de rayon 1, et de quatre quarts de cercle de rayon √(2). La longueur est donc : $L_1 = \pi.(4+\sqrt{(2)})$.

On conjecture que la formule risque de prendre une forme du type :
$L_n = \pi(u_n+v_n)$ et la suite de l'exploration indique :

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
u_n	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14
v_n	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6	6	6	7

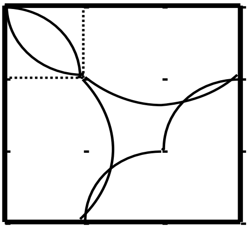
On pourra ainsi établir les résultats :
$L_{4k} = \pi(4k + 2k)$; $L_{4k+1} = \pi(2(2k+1) + (2k+1))$; $L_{4k+2} = \pi(2(2k+1) + 2(k+1))$; $L_{4k+3} = L_{4k+4}$.

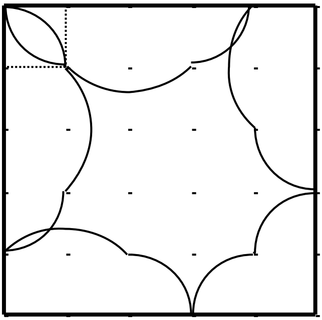
Si, de même, on s'intéresse aux hypocarroïdes, on aura les délicates courbes ci-dessous.



n=1

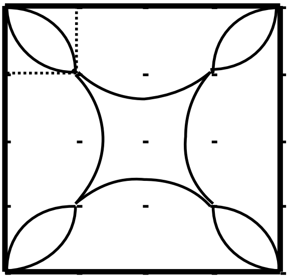
n=2





n=4

n=3



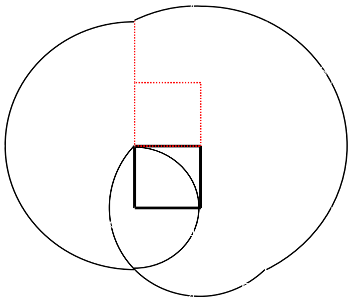
Le calcul des longueurs de ces courbes est de la même nature que celui des longueurs des épicarroïdes.

Prolongements – Pistes de recherches

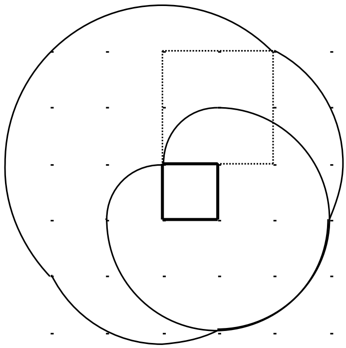
La liste des activités possibles à partir de ces courbes est loin d'être close. On peut, s'intéresser…

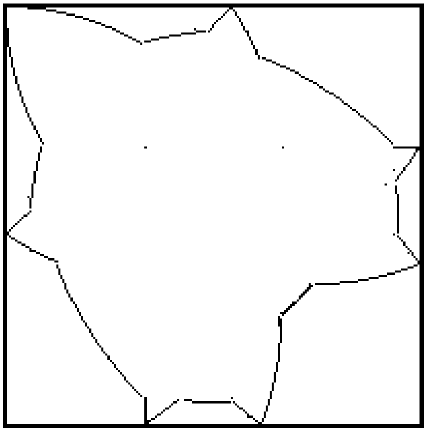
- au cas particulier du carré de côté n tournant autour du carré de côté 1.
- aux versions rallongées et raccourcies des carroïdes. (ci-après, une épicarroïde 1-1 rallongée)

▪au cas du carré de côté n tournant autour du carré de côté p : la courbe se referme-t-elle ? au bout de combien de tours ? quelle est la longueur de la courbe obtenue ?



Ci-dessous une épicarroïde obtenue pour n double de p et une hypocarroïde obtenue avec un carré de côté 2 dans un carré de côté 3. On remarquera que la trajectoire est la réunion de 21 arcs de cercles ! Les deux carrés sont de dimension suffisamment proches pour que cela "coince".





(suite de la page 11) :

- au cas où on ne suivrait plus la trajectoire d'un sommet, mais celle d'un point d'un côté ? d'un point intérieur ?

- à la fabrication d'un instrument de tracé équivalent du fameux "spirograph" (marque déposée).

- à la programmation du phénomène, ou du moins à son exploration à l'aide d'un logiciel de type "Cabri" (marque déposée aussi).

- à l'extension de l'idée en remplaçant les carrés par d'autres polygones ; aux modèles "mixtes" : un triangle de côté 1 tourne autour d'un carré de côté n…

Pol Le Gall