Problème du trimestre n°53
Énoncé proposé par Pascal BERTIN

Quatre villes sont disposées aux quatre sommets d'un carré. On désire les relier entre elles par un réseau routier constitué de tronçons rectilignes, de façon que chaque ville puisse être reliée aux trois autres. En voici deux exemples :

Il s'agit de chercher un tel réseau, dont la longueur totale soit aussi petite que possible. Que proposez vous ?

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

Solution du problème n°52
Énoncé proposé par François DROUIN

Le numéro spécial « NOMBRES » de LA RECHERCHE (n°278, juillet-août 1995) indique un méthode utilisée par les paysans du Nordeste brésilien :
« Pour trouver l'aire d'une parcelle ayant la forme d'un quadrilatère, ils multiplient la demi-somme des longueurs de deux côtés opposés par la demi-somme des longueurs des deux autres côtés opposés. »
Existe-t-il des quadrilatères autres que le rectangle pour lesquels cette méthode est exacte ?

Les quatre réponses reçues ce trimestre émanent de Michel BARTHEL (ancien stagiaire IUFM, actuellement sous les drapeaux), François COLMEZ (92 Antony), Alain HERBELOT (88 Vittel) et Pol LE GALL (57 Rombas).

1) Solution de M. Barthel et P. Le Gall:

Cette solution est basée sur l'aire d'un triangle ABC, qui peut s'exprimer sous la forme $\mathcal{S}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$, soit encore $\frac{1}{2}AB.AC.\sin\hat{A}$.

Soit un quadrilatère convexe ABCD.

On a $\mathcal{S}(ABCD) = \mathcal{S}(ABD) + \mathcal{S}(CBD) = \frac{1}{2}AB.AD.\sin\hat{A} + \frac{1}{2}CB.CD.\sin\hat{C}$,

et aussi $\mathcal{S}(ABCD) = \mathcal{S}(BAC) + \mathcal{S}(DAC) = \frac{1}{2}BA.BC.\sin\hat{B} + \frac{1}{2}DA.DC.\sin\hat{D}$.

En prenant membre à membre la demi-somme il vient $\mathcal{S}(ABCD) = \frac{1}{4}(AB.AD.\sin\hat{A} + BA.BC.\sin\hat{B} + CB.CD.\sin\hat{C} + DA.DC.\sin\hat{D})$.

Cette dernière expression est évidemment toujours inférieure ou égale à $\Sigma = \frac{1}{4}(AB.AD + BA.BC + CB.CD + DA.DC)$, avec égalité si, et seulement si, $\sin\hat{A} = \sin\hat{B} = \sin\hat{C} = \sin\hat{D} = 1$, c'est-à-dire si ABCD est un rectangle.

Or, on peut aussi écrire Σ sous la forme $\Sigma = \frac{1}{2}(AB + CD).\frac{1}{2}(AD + BC)$, qui n'est autre que la formule "brésilienne".

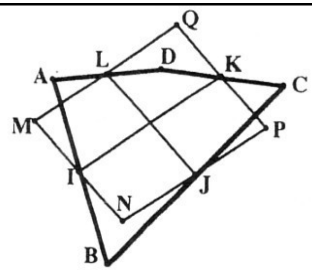
Nous pouvons donc conclure que cette formule n'est exacte que pour les champs rectangulaires, et que sinon elle donne une valeur trop grande.

2) Solution de A. Herbelot et de F. Colmez (communication orale):

La solution qui suit est en fait une version un peu plus sophistiquée que la solution envoyée par A. Herbelot, que j'ai mise en forme suite à une conversation avec F. Colmez. Elle utilise la notion d'*aire algébrique*.

On définit, pour un parallélogramme ABCD, son aire algébrique comme étant $\mathcal{A}(ABCD) = \text{dét}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$. Elle est donc positive (i.e. égale à l'aire géométrique $\mathcal{S}(ABCD)$) si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ constituent une base directe, nulle si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et négative, égale à $-\mathcal{S}(ABCD)$, si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est une base indirecte.

Soit donc un quadrilatère direct ABCD, et soient I, J, K, L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DA] (remarque: IJKL est direct). On appelle MNPQ le parallélogramme dont les côtés [MN], [NP], [PQ], [QM] ont pour milieux respectifs I, J, K, L (remarque: MNPQ est direct). Posons enfin $\vec{u} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{LJ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{IK}$, et $\vec{w} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{QD}$.



On a $\mathcal{S}(ABCD) = \mathcal{A}(ABCD)$

$= \mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(BCD)$

$= \frac{1}{2}[\text{dét}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) + \text{dét}(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})]$

Mais on peut encore écrire:

$\text{dét}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \text{dét}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QD}) = \text{dét}(\vec{u} + 2\vec{w}, \vec{v} + 2\vec{w})$

$= \text{dét}(\vec{u},\vec{v}) + 2.\text{dét}(\vec{u},\vec{w}) - 2.\text{dét}(\vec{v},\vec{w})$ (linéarité)

$\text{dét}(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}) = \text{dét}(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD}, \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NB}) = \text{dét}(-\vec{u} + 2\vec{w}, -\vec{v} + 2\vec{w})$

$= \text{dét}(\vec{u},\vec{v}) - 2.\text{dét}(\vec{u},\vec{w}) + 2.\text{dét}(\vec{v},\vec{w})$

D'où, en prenant la demi-somme des deux expressions: $\mathcal{S}(ABCD) = \text{dét}(\vec{u},\vec{v})$, c'est-à-dire $\mathcal{S}(ABCD) = \text{dét}(\overrightarrow{LJ},\overrightarrow{IK})$ (lequel, d'ailleurs, est égal à l'aire du parallélogramme MNPQ).

Mais $\overrightarrow{LJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ et $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$, donc:

$LJ \leq \frac{AB + DC}{2}$ et $IK \leq \frac{AD + BC}{2}$, avec égalité si, et seulement si, les vecteurs en cause sont colinéaires, c'est-à-dire (AB)//(CD) et (AD)//(BC) respectivement. Les deux égalités ci-dessus sont donc vérifiées si, et seulement si, ABCD est un parallélogramme; alors, MNPQ est confondu avec ABCD.

Enfin, dans ce cas, le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{LJ}$ (= $\overrightarrow{AB}$) et $\overrightarrow{IK}$ (= $\overrightarrow{AD}$) est égal au produit de leurs normes si, et seulement si, ils sont orthogonaux. Donc l'aire du quadrilatère ABCD sera maximum dans le seul cas où ce parallélogramme sera en fait un rectangle.

P.S.1: Pol Le Gall pose quelques questions supplémentaires:

- Cette approximation est-elle meilleure que celle qui consisterait à remplacer, dans la formule brésilienne, les côtés opposés par les côtés consécutifs? ou le demi-produit des diagonales? ou...?
- Quel critère choisir pour répondre à la question précédente ? Peut-on envisager une réponse probabiliste, qui dirait pour quelle formule on a le moins de chances de se tromper pour une marge d'erreur donnée ?
- Quel est l'avenir du théorème qui vient d'être démontré, à savoir: "*un quadrilatère convexe est un rectangle si, et seulement si, son aire vérifie la formule brésilienne*" ?
- Que penser de la formule des Brésiliens du Sud-Ouest *(sic)*, qui consiste à effectuer le produit de deux côtés consécutifs des 4 façons possibles, et à prendre la moyenne de ces 4 produits ?

P.S.2: Jacques Verdier a relevé, dans le bulletin de la Régionale APMEP de Nice, le texte suivant:

"*Au Moyen-Age, l'abaque (arithmétique) était enseignée en langue vulgaire, pour ceux qui ne connaissaient pas le latin. Le premier ouvrage d'arithmétique imprimé pour enfants, négociants et marchands est* Lo Compendio de la Abaco, *édité en 1492 à Turin et écrit en langue niçoise.*

C'était surtout un ouvrage pratique et pédagogique, où l'auteur évitait toute démonstration (...). Comme il était d'usage à cette époque, ce traité se terminait par un chapitre de géométrie où l'auteur, Pelolos, utilisait les règles qu'il avait exposées pour les calculs numériques."

Voici un exemple tiré du XVIIIe chapitre de ce livre (exemple 6 p. 199):

"*Soit un champ dont les côtés mesurent 15, 66, 13 et 64.*

Calcule 15 + 13 /2 = 14 et 66 + 64 /2 =65. Sa surface 65 x 14 = 910."

PS3: Une réponse (très) tardive de Jérôme Cardot, ancien Lorrain "exilé" en Bretagne Occidentale .. nous la publierons dans un prochain bulletin.