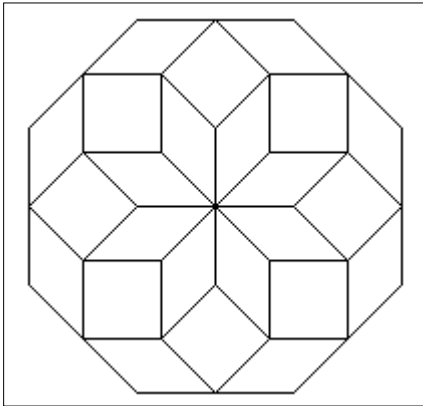


LE PLAT DE SOISSONS

Bernard Parzysz

Le hasard de mes lectures m'a fait rencontrer, en illustration d'un article, la photographie d'un plat gallo-romain, en argent partiellement doré, exposé au musée municipal de Soissons et remontant à la seconde moitié du deuxième siècle de notre ère. Il s'agit d'un plat rond dont la partie centrale est décorée d'un motif géométrique, qui a la particularité d'être constitué de

56 segments de même longueur, délimitant 24 quadrilatères juxtaposés, losanges et carrés (fig. 1).



L'intérieur de chaque quadrilatère est orné d'un motif végétal (auquel je ne m'intéresserai pas ici, pour me centrer sur la géométrie du décor). Trois concordances m'ont remémoré la mosaïque découverte à Metz fin 1994 (cf. *Petit Vert* n° 40, déc. 1994) : 1° l'époque (2^{ème} siècle), 2° la richesse de la composition géométrique, et 3° le remplissage des polygones par des

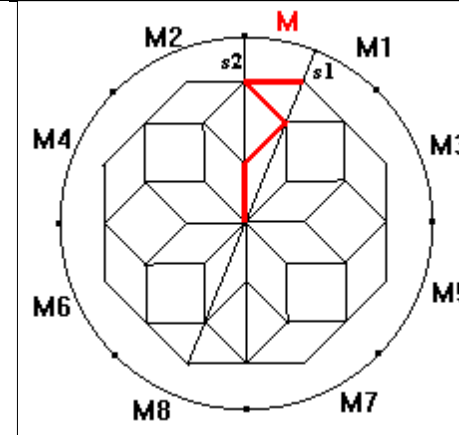
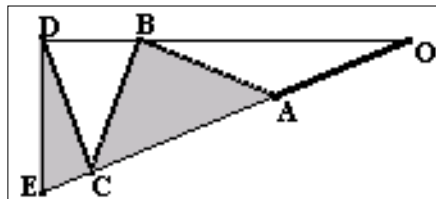
motifs végétaux.

Une différence fondamentale cependant : dans le cas de la mosaïque, on se trouvait en présence d'une partie d'un pavage du plan, alors qu'ici il s'agit d'un motif complet en lui-même, inscrit dans un octogone.

1. Le groupe d'isométries associé

Il s'agit – on s'en serait douté – du groupe de l'octogone (= groupe diédral D_8), engendré par exemple par deux réflexions, s_1 et s_2 , dont les axes déterminent un angle de $2\pi/16$. On peut alors prendre comme région fondamentale l'un quelconque des deux secteurs compris entre ces deux droites, le motif minimal M consistant en une ligne brisée OABCD composée de 4 segments de même longueur (fig. 2).

Par actions successives alternées des deux réflexions, on engendre la totalité du décor géométrique.



Plus précisément (fig. 3) :

$M_1 = s_1(M)$
 $M_2 = s_2(M \cup M_1)$
 $M_3 = s_1(M_2) = s_1 \circ s_2(M \cup M_1)$
 $M_4 = s_2(M_3) = s_2 \circ s_1 \circ s_2(M \cup M_1)$
 $M_5 = s_1(M_4) = (s_1 \circ s_2)^2(M \cup M_1)$
 $M_6 = s_2(M_5) = s_2 \circ (s_1 \circ s_2)^2(M \cup M_1)$
 $M_7 = s_1(M_6) = (s_1 \circ s_2)^3(M \cup M_1)$
 $M_8 = s_2(M_7) = s_2 \circ (s_1 \circ s_2)^3(M \cup M_1)$,
 ce qui achève la construction du décor.

Cette structure est particulièrement simple, mais on voit :

1° que le motif qu'il faut prendre en compte pour engendrer le décor par une succession de 6 itérations alternées est, non pas M , mais $M \cup M_1$, c'est-à-dire l'ensemble constitué de M et de son symétrique par rapport à l'un quelconque des deux axes ;

2° que chaque itération fait gagner un motif ;

On peut d'ailleurs remarquer que l'on obtiendrait le même nombre d'itérations que ci-dessus en considérant deux axes faisant un angle de $6\pi/16$, $10\pi/18+6$ ou $14\pi/16$. Ce qui, on s'en doute, est lié au fait que 3, 5, 7 sont premiers avec 8.

Il existe certes bien d'autres façons d'engendrer le groupe D_8 , mais le recours aux deux réflexions citées en premier suggère une réalisation de type « ribambelle », obtenue par 4 pliages successifs d'une feuille carrée, suivis d'un découpage (fig. 2) : la ligne brisée OABCD s'obtient aisément en reportant, à partir du point O, une même longueur alternativement sur un bord puis sur l'autre, et il suffit ensuite d'enlever les triangles ABC et CDE. Il convient cependant, lors du découpage, de prendre garde à ne pas aller jusqu'au bord aux points B et C.

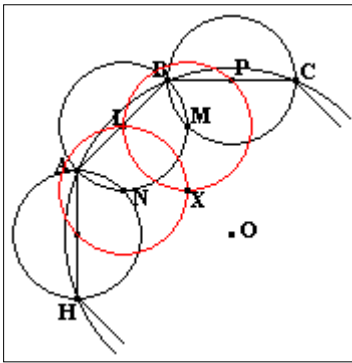
2. La construction à la règle et au compas

Néanmoins, les considérations qui précèdent ne sont pas d'une grande utilité pour réaliser matériellement, et de façon simple, l'ensemble du décor. On peut donc tenter d'imaginer des procédures utilisant la règle et le compas permettant d'y parvenir. Le procédé imaginé par l'artisan antique ne

figurera peut-être pas parmi eux, mais on pourra les considérer comme des hypothèses plausibles.

Tout d'abord, étant donné le groupe de transformations associé à la configuration, il semble que l'on puisse baser la construction sur la division du cercle en 16, division obtenue à partir d'un diamètre par sept constructions successives de médiatrices (ou de bissectrices, ce qui revient ici au même). Cette division permet alors d'obtenir l'octogone, ainsi que les milieux de ses côtés.

On peut ensuite envisager deux pistes principales :



1° Utilisation du seul compas, à la Mascheroni (fig. 4).

a) Le cercle de diamètre [AB] coupe le cercle de diamètre [BC] en M, qui est le quatrième sommet de l'un des losanges extérieurs, soit IBPM. En traçant ensuite les 6 cercles analogues, on obtient au total les quatrième sommets des 8 losanges extérieurs.

b) Le cercle de centre M passant par le milieu I de [AB] et le cercle de centre N passant par I se recoupent en X. Ce point est

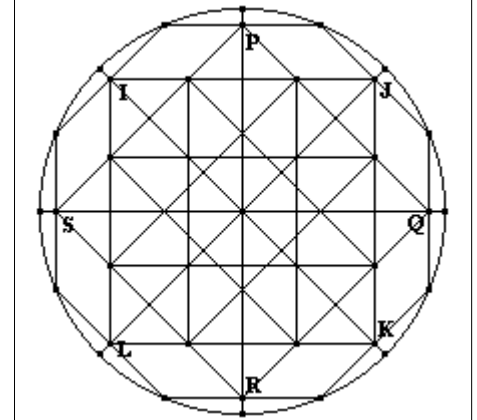
le quatrième sommet de l'un des carrés de la configuration. En traçant ensuite les 6 cercles analogues, on obtient au total les quatrième sommets des carrés, ce qui achève la construction de tous les sommets de la configuration.

N.B. Bien sûr, les sommets de l'octogone, ainsi que les milieux de ses côtés, pourraient eux aussi être obtenus au compas seul, en vertu du théorème de Mohr-Mascheroni (« *Tout point constructible à la règle et au compas peut être obtenu au compas seul* »), mais n'oublions pas qu'il s'agit ici de rechercher des constructions pratiques, aussi simples que possible, et non de faire preuve de virtuosité géométrique.

2° Utilisation de la règle seule (fig. 5).

a) On trace les deux carrés IJKL et PQRS, obtenus en prenant un milieu de côté de l'octogone sur deux. Les intersections de ces deux carrés fournissent 8 points, qui ne sont autres que les quatrième sommets des losanges extérieurs.

b) On a, en particulier, obtenu deux points sur chaque côté du carré IJKL. En joignant les points situés sur deux côtés opposés parallèlement aux autres côtés, on détermine 4 carrés dans les « coins » du carré IJKL, qui sont en fait des carrés de la configuration. Les 4 autres carrés s'obtiendront de manière analogue, en considérant le carré PQRS (notons que l'on a du même coup obtenu les 8 losanges intérieurs). Il ne reste plus ensuite qu'à effacer les traits superflus.



Les deux constructions ci-dessus présentent le « mérite » de ne nécessiter qu'un seul instrument pour obtenir les points déterminant la configuration. Cependant, dans le premier cas, il est quand même nécessaire de recourir à la règle pour terminer le dessin, afin de joindre les points obtenus. Au contraire, une fois le cercle divisé en 16, le second procédé utilise exclusivement la règle : il s'agit de joindre des points précédemment construits, puis d'éliminer les traits « parasites ». C'est pourquoi j'ai tendance à penser –mais c'est bien sûr subjectif– que c'est plutôt une construction de ce type qui a été mise en œuvre par l'orfèvre qui a réalisé le plat, avec un schéma-clé du type de la fig. 6. En tout cas, si des lecteurs du Petit Vert ont des idées d'autres algorithmes de construction, je serais heureux qu'ils m'en fassent part.

Ajout de la rédaction du Petit Vert en 2008 :



Photo du plat, issue du site du musée de Soissons